P. H. HENRIQUES

LÄROBOK
I
GEOMETRISK RITNING

AKTIEBOLAGET SEELIG & Co
STOCKHOLM
(I DISTRIBUTION)

LÄROBOK

I

GEOMETRISK RITNING

INNEHÅLLANDE

GRUNDERNA AV PROJEKTIONS-, SKUGG- OCH PERSPEKTIVLÄRAN

FÖR

DE ALLMÄNNA LÄROVERKEN

AV

P. H. HENRIQUES
F. D. PROFESSOR VID KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN

OMARBETAD OCH TILLÖKAD
AV

KARL J. EK
F. D. TECKNINGSLÄRARE VID HÖGRE LATINLÄROVERKET
Å NORRMALM, STOCKHOLM

TJUGUFJÄRDE UPPLAGAN

AKTIEBOLAGET SEELIG & C:o
STOCKHOLM
(I distribution)

CENTRALTRYCKERIET
ESSELTE AB, STOCKHOLM 1953
242781

INNEHÅLL

Kap. VI. **Geometrisk skugglära.**

Kap. VII. **Perspektivlära.**

PLANSCHFÖRTECKNING

Uppgifter till övning i ritinstrumentens användning.

FÖRORD

TILL TJUGUANDRA TILLÖKADE UPPLAGAN.

Största intresset för geometrisk ritning förefinnes säkerligen i realskolans högsta klasser och gymnasiets tvenne lägsta ringar, innan studentexamen på allvar börjat kasta sin skugga framför sig. I dessa avdelningar är det, som det mesta av linearritningskursen bör medhinnas, så att endast skugg- och perspektivlära återstå till tredje och fjärde ringarna, något som läroverksstadgan i kursplanen också framhåller.

För dem, som önska särskilt meritera sig för fortsatta studier vid fack- och högskolor, är studiet av de efter varje avdelning förekommande övningsuppgifterna särdeles lämpligt. Lösningen och utförandet av dessa uppgifter kunna även användas såsom i läroverksstadgan för högsta ringarna föreskrivet »enskilt arbete».

Föreliggande upplaga har kompletterats med en utförligare inledning till den direkta perspektivläran, utsträckt till perspektivisk speglings- och skugglära, varjämte planschhäftet har utökats med fyra nya planscher, tre med motiv utförda enligt den raka eller frontperspektiviska och en med motiv enligt den sneddperspektiviska metoden. Min förhoppning är att boken härigenom vunnit i användbarhet i de svenska skolorna.

Stockholm i augusti 1942.

KARL EK

Kap. I. **Inledning**

§. 1. Hjälpmedel vid geometrisk ritning
Ritningarnas format

Vid utförande av geometriska ritningar användas följande hjälpmedel.

1) *Ritbestick*, innehållande passare, insatscirkel för blyerts och för tusch, jungfrucirkel med tuschinsats samt dragstift. *Gradskiva.*

2) *Ritbräde.*

3) *Vinkellinjal.*

4) *2 vinkelhakar*, nämligen en 45° och en 60°.

5) *Blyertspenna*, Faber eller Hardtmuth no 4.

6) *Kautschuk* för blyerts och för tusch.

7) *Tusch.*

8) *Rött bläck.*

9) *Tuschkopp med lock.*

10) *Häftstift.*

11) *Meterstock.*

12) *Mall* för kroklinjers uppritande.

13) *Pennkniv.*

14) *Pennstift med penna.*

15) *Vitt läskpapper.*

16) *Ritpapper.*

Samtliga ritningar göras i samma format. Ett lämpligt sådant är *42 cm* yttre längd × *30 cm* yttre bredd.

Varje ritning förses med en enkel linje såsom ram. Till höger ovan ramen anbringas planschens nummer, under ramen till vänster läroverkets namn, till höger lärjungens namn och klassavdelning. Allt ordnat som fig. 1 visar.

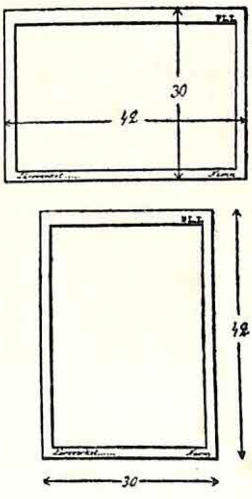


Fig. 1

§ 2. Anvisningar vid anskaffandet och begagnandet av ritsaker

Vid köp av *ritbestick* väljer man hellre ett med få delar än ett lika dyrt med många. Det senare är nämligen oftast sämre utfört. Ett bestick är tillräckligt rikhaltigt, om det innehåller de i § 1, mom. 1, uppräknade delarna. De vanliga i handeln förekommande svenska besticken från Stockholm och Eskilstuna äro merendels goda och i förhållande till beskaffenheten billiga.

Tillse att *dragstiftets fjädrar* äro väl sammanslipade, så att ej den ena överskjuter den andra, och att vid vridning på skruven fjädern rör sig likformigt.

Välj alltid passare med runda och *ej* sådana med trekantiga spetsar.

Första villkoret för vidmakthållandet av ett bestick är, att det efter varje begagnande *ytterst väl rengöres.* I synnerhet böra dragstiften befrias från tusch och smutsfläckar, vilket bäst sker genom gnidning med ett stycke mjukt handskskinn eller en tyglapp. Dragstiftets fjädrar få aldrig vid förvarandet skruvas tätt ihop utan böra hava ett avstånd av omkring 1 mm mellan spetsarna.

Ritbrädet skall vara av möjligast *torrt* och *kvistfritt* trä. Lämpliga dimensioner: 50 × 40 cm. De undre ribbor, vilka sammanhålla brädet, böra ej vara fastlimmade vid brädet, emedan därigenom träets fria sammandragning vid torkningen hindras.

Vinkellinjalen bör hava *fast* tvärstycke. Linjaler med rörligt tvärstycke och skruv äro dyrare och vid de första ritstudierna onödiga. Trälinjaler äro att föredraga framför metallinjaler. Linjalens längd lämpligen omkring 60 cm.

Vinkelhakarna böra vara av hårt trä eller ebonit, men ej av metall och ej för små. Vinkelhaken för 45° är oumbärligare än den för 60°.

Blyertspennan bör vara av bästa beskaffenhet, emedan därigenom mycken tid besparas. En utomordentligt god och varaktig blyertspenna är den s. k. »Koh-I-Noor» av Hardtmuth.

Tusch finnes i handeln dels i stänger, dels i flytande form på små flaskor. Den senare är vid de första studierna

att föredraga, emedan man slipper den tidsödande och söliga tuschrivningen. Vid »lavering» (målning med vattenfärg) bör stångtusch användas. God stångtusch har en jämn, glansig, brottyta, låter ej allt för lätt riva sig i vatten och avgiver vid rivningen en ganska stark lukt av mysk; dåliga tuschsorter äro lösa, matta i brottet och lukta vid rivningen kimrök och kamfer. Glöm aldrig att efter begagnandet av ett stycke tusch *väl avtorka* detsamma, emedan det eljest spricker sönder och inom kort förstöres. Tuschkopparna böra vara av *vitt porslin* och hava cirka 6 cm diameter.

De bästa *häftstiften* hava stora, svagt kullriga mässingshuvuden, i vilka stiften äro *ingängade*. På de billigare är stiftet endast fastnitat, vilket är sämre, emedan huvudet lätt lossnar. De amerikanska, ur ett enda stycke pressade häftstiften hava visserligen tämligen trubbig spets, men förtjäna förordas för sin billighets skull.

Gott ritpapper bör vara rent vitt, tjockt och svagt glänsande. Berömt är det engelska s. k. Whatmanspapperet i större och mindre ark. Ett gott svenskt ritpapper är bland andra det från Grycksbo pappersbruk. Av ett större ark erhållas två ritningar i det ovan angivna formatet.

§ 3. Bestämmelser angående de vid geometrisk ritning använda beteckningarna

Vid utförandet av de kommande planscherna iakttagas följande regler:

1) *Givna* punkter utmärkas med ytterst små, *svarta* cirklar.

2) *Givna* linjer utmärkas med grova, *svarta streck*.

3) *Hjälplinjer* utmärkas med mycket *fina*, *heldragna*, *svarta streck*.

4) *Sökta* punkter, vilkas bestämmande utgör konstruktionens ändamål, betecknas med mycket *små*, *röda cirklar*, någon gång undantagsvis med små, röda streck.

5) *Sökta* linjer betecknas med grova *röda* streck.

§ 4. Några geometriska satser

De geometriska grundbegreppen äro *kropp*, *yta*, *linje* och *punkt*.

1) *Kropp* kallas den storhet, som har utsträckning i tre riktningar, *längd*, *bredd* och *höjd*.

2) Kroppen begränsas av *ytor*. En yta har två utsträckningar, *längd* och *bredd*.

3) Ytan begränsas av *linjer*. En linje har endast en utsträckning, *längd*.

4) Linjen begränsas av *punkter*. Punkten har ingen utsträckning.

5) En linje är *rät*, då den utgör kortaste avståndet mellan två punkter.

6) Linjer äro *parallella*, då deras inbördes avstånd är lika, huru långt de än utdragas.

7) *Vinkel* benämnes lutningen mellan två räta linjer, som utgå från samma punkt. Punkten kallas vinkelns *spets* och de båda linjerna dess *ben*. Förlänges det ena vinkelbenet från spetsen, bildas två vinklar, *sidovinklar*. Äro sidovinklarna lika stora, kallas de *räta*. En vinkel, som är mindre än sin sidovinkel, kallas *spetsig* och en, som är större, *trubbig* vinkel.

8) En yta är *plan*, då varje rät linje, som förenar två punkter i densamma ligger helt och hållet i ytan; eljest *buktig*. En begränsad del av ett plan kallas *plan figur*.

9) En plan figur, *månghörning* (*polygon*), kallas *rätlinjig*, om alla dess begränsningslinjer äro räta, *kroklinjig*, om den har en eller flera krokiga begränsningslinjer.

10) En månghörning, begränsad av räta linjer, kallas *regelbunden*, om alla dess sidor och vinklar äro lika stora. Med hänsyn till sidornas antal benämnes månghörningen *trehörning* eller *triangel*, *fyrhörning*, *femhörning* o. s. v.

11) Den regelbundna triangeln kallas även *liksidig*. Äro blott två sidor i triangeln lika stora, kallas den *likbent*. Är en vinkel i en triangel rät, säges triangeln vara *rätvinklig*. *Triangelns höjd* kallas den linje, som från ett av

hörnen drages vinkelrätt mot den motstående sidan. Denna senare kallas då *triangelns bas.*

12) En fyrsiding, vars motstående sidor äro parallella, kallas *parallellogram.* Äro alla vinklarna räta och alla sidorna lika stora, är parallellogrammen en *kvadrat.* Äro vinklarna räta men närliggande sidor olika stora, kallas den *rektangel.* De räta linjer, som sammanbinda fyrsidingens motstående hörn, benämnas *diagonaler.* En fyrsidig figur, som icke är en parallellogram, kallas *trapets.*

13) *Cirkeln* är en plan figur, begränsad av en kroklinje, vars alla punkter hava samma avstånd från en fast punkt inom densamma. Kroklinjen kallas *cirkelns periferi* och den fasta punkten *medelpunkt.* Varje genom medelpunkten dragen rät linje, som har sina ändpunkter på periferien, kallas *diameter.* Halva diametern kallas *radie.* Andra kroklinjer äro exempelvis *ellipsen*, *parabeln*, *korgbågen*, *snäcklinjen*, m. fl.

Kap. II. Geometriska konstruktionsövningar

§ 1. Schackbräde, kompassros, tratt och kruka

De två första planscherna, innehållande fyra enkla uppgifter, utgöra förberedande övningar i handhavandet av ritinstrumenten. De fyra förebilderna hava här sammanförts å tvenne planscher, men lärjungen bör hellre placera endast en av dem å varje ritning.

Fig. 1. Lägg, sedan ramen uppritats, vinkellinjalen på ritbrädet med tvärstycket tätt tryckt intill brädets vänstra kant. Upprita mitt på papperet en linje *ab.* Mät ut med passaren var mittpunkten *m* på denna linje är belägen. Drag genom *m* en linje *cd* vinkelrätt mot *ab.* Tag *2 cm*[1] i passaren och avsätt detta mått *4* gånger från *m* åt alla fyra hållen. Drag genom de sålunda avsatta måttpunkterna *8* linjer vinkelräta mot, och *8* linjer parallella med *ab.* Här-

[1] I brist på måttstock kan måttet tagas på första skalan å pl. V i planschhäftet.

igenom erhålles ett s. k. schackbrädesmönster med *64* rutor. Måla varannan ruta så som planschen visar och texta mitt över mönstret ordet *schackbräde*.

Fig. 2. Upprita i likhet med föregående plansch mitt på papperet en linje *ab*. Genom mittpunkten *m* på denna linje drages en linje vinkelrätt mot *ab*. Tag *8 cm* i passaren och upprita med *m* som medelpunkt en cirkel. Denna är genom de räta linjerna delad i *4* lika stora delar. Dela varje del i *2* lika stora delar och dessa ytterligare i *2* delar, så att hela cirkeln blir delad i *16* lika delar. Sammanbind delpunkterna såsom planschen utvisar och fullborda *kompassrosen*. Tag *5,5 cm* i passaren och upprita den inre cirkeln.

Kompassrosen utgör tavlan eller skivan i en kompass; denna är, som bekant, ett instrument, som visar väderstrecken. *Norr*, *söder*, *öster* och *väster* äro de s. k. *kardinalväderstrecken*, efter vilka alla de andra fått sina namn. *Interkardinalväderstrecken* äro *nordost*, *sydväst*, *nordväst*, *sydost*. De mellan dessa liggande strecken kallas nordnordost, sydsydväst, nordnordväst, sydsydost, ostnordost, västsydväst, ostsydost och västnordväst.

Fig. 3. Vänd ritbrädet, så att ena kortsidan kommer närmast. Rita en linje *ab* mitt på papperet i dettas längdriktning; därefter en mot den förra vinkelrät linje *cd* *9 cm* från närmaste marginallinjen. Avsätt å den vinkelräta linjen från *a* *7 cm* åt vardera sidan. Tag linjen *cd* i passaren och avsätt densamma från *c* till *h* och fullborda den liksidiga triangeln. Gör själva *tratten* *10,5 cm* hög och rita en *7,5 cm* hög pip därpå. Tag vidare *12 mm* i passaren och upprita ringens yttre cirkel. Ringens tjocklek är *2 mm*.

Fig. 4. Uppgift att med tillhjälp av *4* cirkelbågar rita en *kruka*. Håll ritbrädet i samma ställning som i föregående exempel. Drag en mittlinje *ab* i papperets längdriktning och avsätt *7 cm* från närmaste marginallinjen en punkt *a* å mittlinjen. Drag genom *a* en mot mittlinjen vinkelrät linje *cd*. Drag en parallell linje på *7,5 cm* avstånd från den förra och avsätt från mittlinjen åt båda sidor *6,5 cm*, så erhållas medelpunkter för *krukans* större sidocirklar.

De mindre cirklarnas medelpunkter ligga *8 cm* högre och *7,5 cm* från mittlinjen. Sammanbindas de olika medelpunkterna korsvis med räta linjer, så erhållas de punkter, där cirklarna övergå i varandra. Krukans hela höjd är *18,5 cm*.

Dessa 4 uppgifter ritas med blyerts och laveras i ljus vattenfärg eller streckas med färgpenna.

§ 2. Räta linjer och vinklar. Pl. I

Att dela en given sträcka mitt itu. Fig. 1.

Sträckan *ab* skall delas mitt itu. Slå en cirkelbåge med *a* till medelpunkt och med en radie större än halva *ab*. Tag *b* till medelpunkt för en cirkelbåge med samma radie. Sammanbind skärningspunkterna *c* och *d*, då erhålles mittpunkten *m*. Linjen *cd* står vinkelrätt mot *ab*.

Att genom en given punkt på en linje draga en däremot vinkelrät linje. Fig. 2.

Från den givna punkten *c* skall en mot linjen *kl* vinkelrät linje dragas. Avsätt lika stora stycken från *c* åt *e* och *f*. Slå med *e* till medelpunkt en cirkelbåge, vars radie är större än halva *ef*. Tag *f* till medelpunkt och förfar på samma sätt. Sammanbind bågarnas skärningspunkt *d* med *c*, så är den sökta linjen bestämd.

Att från en given punkt utom en linje draga en däremot vinkelrät linje. Fig. 2.

Från den givna punkten *a* skall dragas en mot *kl* vinkelrät linje. Slå med *a* till medelpunkt en cirkelbåge, som skär linjen i två punkter *m* och *n*. Tag *m* till medelpunkt och rita en cirkelbåge, vars radie är större än halva *mn*. Tag *n* till medelpunkt och förfar likaså. Sammanbind bågarnas skärningspunkt *p* med *a*, så är *ap* den sökta linjen.

Anm. Dessa uppgifter lösas enkelt och noggrant utan hjälpkonstruktioner medelst två vinkelhakar.

Att genom en given punkt utanför en given linje draga en med densamma parallell linje. Fig. 3.

Från den givna punkten *p* skall dragas en med *ab* paral-

lell linje. Slå med *p* till medelpunkt en cirkelbåge, som skär linjen i *c*. Tag *c* till medelpunkt och drag med samma radie cirkelbågen *pd*. Tag längden *dp* i passaren och avsätt detta mått från *c* till *g*. Då är *gp* den sökta linjen.

Anm. Denna uppgift löses enkelt och noggrant utan hjälpkonstruktioner medelst två vinkelhakar.

Att göra en vinkel lika stor med en given vinkel. Fig. 4.

Vinkeln *abc* är given ävensom linjen *gh*. Mot denna linje skall i punkten *g* sättas en vinkel, lika stor med den givna.

a) *Medelst gradskiva.* Uppmät storleken av vinkeln *abc*. Avsätt en vinkel med samma gradtal mot *gh* i punkten *g*.

b) *Utan gradskiva.* Slå med *b* till medelpunkt en cirkelbåge *ef* och med samma radie samt *g* till medelpunkt en cirkelbåge, som avskär punkten *s*. Tag kordan *ef* i passaren och avsätt detta mått från *s* till *k*. Sammanbind *k* med *g*, så är den sökta vinkeln bestämd.

Att dela en given vinkel mitt itu. Fig. 5.

Skall *abc* delas mitt itu, slås med *b* till medelpunkt cirkelbågen *ef*. Tag *e* till medelpunkt för en cirkelbåge, vars radie är större än halva längden *ef*. Tag *f* till medelpunkt och upprepa förfarandet. Sammanbind skärningspunkten *s* med spetsen *b*, så är den givna vinkeln delad mitt itu.

Att dela en given sträcka i ett visst antal lika stora delar. Fig. 6.

Sträckan *mn* skall delas i t. ex. 7 lika delar. Sätt i *m* en linje *ml* av godtycklig längd och riktning. Tag ett mått *mc* efter behag i passaren och avsätt detsamma 7 gånger på *ml*. Sammanbind sista delpunkten *i* med *n* och drag genom de andra delpunkterna linjer parallella med *in*; då indelas den givna längden *mn* i 7 lika stora delar.

Att dela en given sträcka i samma förhållande som en annan given sträcka. Fig. 7.

Den givna sträckan *ab* är medelst de godtyckligt valda punkterna *c* och *d* delad i ett visst förhållande. Nu skall *mn* delas i samma förhållande. Sätt i *m* en linje *ml* av godtycklig längd och riktning. Avsätt från *m* stycken *me*,

mf, *mg* lika stora med *ac*, *ad*, *ab*. Sammanbind sista delpunkten *g* med *n* och drag genom de andra delpunkterna linjer parallella med *gn*; då indelas *mn* i samma förhållande som *ab*.

§ 3. **Uppgifter över plana figurer. Pl. II**

Att genom en given punkt f på en cirkel draga en tangent till cirkeln. Fig. 1.

Drag radien *mf* och sätt däremot en vinkelrät linje i *f*. Denna är den sökta tangenten.

Att från en given punkt **p** *utom en cirkel draga tangenter till cirkeln. Fig. 1.*

Sammanbind *p* med medelpunkten *m* och slå en cirkel över *mp*. Skärningspunkterna *r* och *s* förenas med *p* genom räta linjer. Dessa äro de sökta tangenterna.

Att kring en given triangel **abc** *omskriva en cirkel. Fig. 2.*

Dela två sidor *ab* och *bc* mitt itu genom vinkelräta linjer. Dessas skärningspunkt *m* är medelpunkt för den sökta cirkeln.

Att i en given triangel **abc** *inskriva en cirkel. Fig. 3.*

Dela vinklarna vid *a* och *b* mitt itu. Mittlinjernas skärningspunkt *m* är medelpunkt för den sökta cirkeln, vars radie är den mot *ab* vinkelräta längden *mr*.

Att i en given cirkel inskriva en reguljär 6-hörning. Fig. 4.

Den inskrivna 6-hörningens sida är = cirkelns radie. Tag således radien i passaren och avsätt den 6 gånger på periferien.

Att i en given cirkel inskriva en reguljär 5-hörning. Fig. 5.

Drag två mot varandra vinkelräta diametrar och dela hälften av den ena mitt itu i *m*. Tag *m* till medelpunkt och slå en cirkelbåge genom den andra diameterns ändpunkt *s*. Därigenom avskäres punkten *f* på den första diametern och *sf* är längden av den sökta 5-hörningens sida.

Att av tre givna sträckor bilda en triangel. Fig. 6.

a, *b*, *c* äro de givna sträckorna. Gör *gh* lika lång som *a*. Slå cirkelbågar med *g* och *h* till medelpunkter och med radier lika långa som de två övriga sträckorna.

Att på en given sträcka uppríta en liksidig triangel. Fig. 7.

ab är den givna sträckan. Tag *a* till medelpunkt för en cirkelbåge genom *b* samt *b* till medelpunkt för en cirkelbåge genom *a*. De båda cirklarnas skärningspunkt *c* sammanbindes med *a* och *b*.

Att av två givna sträckor **a** *och* **b** *samt en given vinkel* **v** *bilda en parallellogram. Fig. 8.*

Gör $cd=a$, sätt vid *d* en vinkel$=v$ och gör det andra vinkelbenet $de=b$. Tag ändpunkterna *c* och *e* till medelpunkter för cirkelbågar, vilkas radier äro lika långa som *b* och *a*, då erhålles skärningspunkten *f*, och parallellogrammen kan fullbordas.

Att på en given sträcka **ab** *såsom hypotenusa uppríta en rätvinklig triangel med given höjd* **h**. *Fig. 9.*

Slå en halvcirkel på *ab*, sätt vid ena ändpunkten *a* en vinkelrät linje *as*, vars längd$=h$ och drag genom *s* en med *ab* parallell linje *st*. Sammanbindes en av skärningspunkterna *r* eller *t* med ändpunkterna *a* och *b*, så erhålles en triangel, som uppfyller villkoren.

Att på en given sträcka **ab** *uppríta en reguljär 5-hörning. Fig. 10.*

a) *Medelst gradskiva.* Avsätt vid *a* och *b* vinklar, vilkas storlek bestämmes av formeln $v = \frac{5 \times 180 - 360}{2 \times 5} = 54°$. Vinkelbenens skärningspunkt är medelpunkten till en cirkel, i vilken kordan *ab* innehålles 5 gånger.

b) *Utan gradskiva.* Upprita med *ab* till radie en halvcirkel, vilken delas i 5 lika stora delar. Sammanbind *b* med delpunkten *2* och drag (enligt *fig. 2*) en cirkel genom punkterna *a*, *b* och *2*. I denna cirkel innehålles kordan *ab* 5 gånger.[1]

---

[1] På liknande sätt kan en reguljär månghörning, av vilket antal sidor som helst, uppritas på *ab*. Skall t. ex. en 7-hörning konstrueras, delas halvcirkeln uti 7 lika delar, och delpunkten 2 sammanbindes med *b*, o. s. v.

*Att på en given sträcka **ab** upprita en reguljär 6-hörning. Fig. 11.*

Upprita på *ab*, enligt *fig. 7*, en liksidig triangel, då bestämmes medelpunkten *m* till den cirkel, i vilken kordan *ab* innehålles sex gånger.

Att i en kvadrat inrita en reguljär åtta-hörning. Fig. 12.

I kvadraten *abcd* dragas diagonalerna *ac* och *bd*, vilka skära varandra i *m*. Slå med hörnpunkterna *a*, *b*, *c*, *d* till medelpunkter cirkelbågar genom *m*, då bestämmas 8-hörningens punkter *e*, *f* o. s. v.

§ 4. Cirklar och ovaler m. m. Pl. III

*Att genom en given punkt f på en cirkel med medelpunkten **m** draga två tangerande cirklar med given radie **r**. Fig. 1.*

Avsätt på linjen *mp*, åt båda sidor från *f*, ett stycke $= r$. Då erhållas punkterna *p* och *q* såsom medelpunkter för cirklar, vilka uppfylla villkoret.

*En vinkel **asb** är given; att draga cirklar, som tangera vinkelbenen och varandra. Fig. 2.*

Dela vinkeln mitt itu genom linjen *sc*. Tag en punkt m_1 på mittlinjen och slå första cirkeln med m_1 till medelpunkt och den mot vinkelbenet *sb* vinkelräta längden m_1n_1 till radie. Fäll från cirkelns skärningspunkt r_1 med mittlinjen en mot denna vinkelrät linje r_1p_1, tag p_1 till medelpunkt och p_1r_1 till radie för en cirkelbåge, som avskär punkten q_1. Den mot *sb* vinkelräta längden m_2q_1 är radie för nästa cirkel. Denna avskär på mittlinjen *sc* punkten r_2, från vilken den mot *sc* vinkelräta linjen r_2p_2 fälles. Härigenom bestämmes punkten p_2 på vinkelbenet *sb*. Cirkelbågen med p_2 till medelpunkt och p_2r_2 till radie avskär punkten q_2, den mot *sb* vinkelräta q_2m_3 är radie för nästa cirkel o. s. v.

Att upprita en s. k. »ägglinje» medelst fyra cirkelbågar. Fig. 3.

ab är den givna breddlinjen. Slå på *ab* en cirkel och drag den mot *ab* vinkelräta mittlinjen *ci*. Tag *a* och *b* till medelpunkter för cirkelbågar med *ab* till radie och

avskär på dessa bågar, medelst linjerna *ade* och *bdf*, punkterna *e* och *f*. Tag slutligen *d* till medelpunkt för cirkelbågen *eif*.

Att upprita en oval medelst 4 cirkelbågar. Fig. 4.

Om ovalens längd *ab* och bredd *cd* äro givna, kan densamma uppritas, exempelvis på följande sätt. Gör *me*=*mc*, sammanbind *b* med *c* och avsätt från den senare punkten *cf*=*be*. Dela *bf* mitt itu genom en vinkelrät linje. Denna avskär två medelpunkter *g* och *h*, vilka användas till cirkelbågarnas uppritande. Med *h* till medelpunkt och *hc* till radie slås den ena cirkelbågen, med *g* till medelpunkt och *gb* till radie den andra. Båda cirkelbågarna tangera varandra i *n*. Avsättas medelpunkterna *i* och *k* symmetriskt mot *g* och *h*, så kan den återstående delen av ovalen uppritas.

Anm. Denna slutna kroklinje liknar den i nästa paragraf behandlade *ellipsen*.

Att medelst cirkelbågar konstruera en spiralliknande kroklinje. Fig. 5.

Upprita en kvadrat *ABCD* och utdrag, såsom *fig. 5* visar, dess samtliga sidor. Tag *A* till medelpunkt för en fjärdedels cirkel genom *B*. Därigenom avskäres på den förlängda kvadratsidan *DA* punkten *1*. Tag *D* till medelpunkt för en fjärdedels cirkel genom *1*. Därigenom avskäres på den förlängda kvadratsidan *CD* punkten *2*. Tag *C* till medelpunkt för en fjärdedels cirkel genom *2*. Därigenom avskäres på den förlängda kvadratsidan *BC* punkten *3*. O. s. v.

§ 5. Ellips, hyperbel och parabel. Pl. IV

Ellips. Textfig. 2. En sluten plan kroklinje så beskaffad, att *summan* av de båda avstånden *pB* från en godtycklig punkt *p* på kroklinjen till två fasta punkter *B*, *B*, inom densamma alltid är lika stor. De två fasta punkterna *B*, *B*, fig. 2, kallas ellipsens *brännpunkter*. Mitt emellan brännpunkterna ligger ellipsens *medelpunkt*, och alla genom denna dragna linjer kallas *diametrar*. Den största och minsta diametern stå vinkelrätt mot varandra och kallas ellipsens *stor-* och *lillaxel*. Brännpunkterna ligga på storaxeln.

Varje rät linje, som har sina ändpunkter på ellipsen, kallas en *korda* i densamma. Sålunda äro *mn* och *rs* i fig. 2 två parallella kordor.

Två diametrar, så beskaffade att den ena delar mitt itu de kordor, som äro parallella med den andra, kallas *konjugatdiametrar*. Mittlinjen *kl* till de två parallella kordorna *mn* och *rs* i fig. 2 är konjugatdiameter till den med kordorna parallella diametern *uv*.

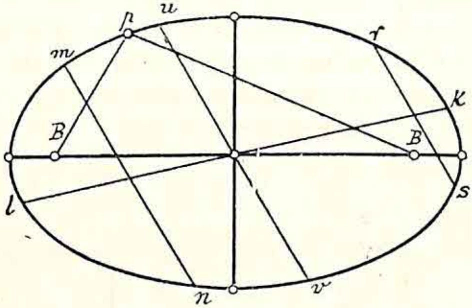


Fig. 2

Ellipsens ovannämnda egenskap användes vid uppritning i större skala på följande sätt.

Ellipsens båda axlar *ab* och *cd* äro givna. Fig. 2 a.

Först bestämmas brännpunkterna. Detta sker sålunda: halva storaxeln tages till radie och lillaxelns ena ändpunkt *c* till medelpunkt för en cirkelbåge, som avskär de två punkterna *B*, *B*. *Dessa äro ellipsens brännpunkter.* Ett snöre, *vars längd är = storaxeln,* fästes sedan med båda ändar medelst stift i brännpunkterna *B*, *B*, varefter ett ritstift föres längs efter snöret, så att detta ständigt förbliver spänt. Den därvid alstrade linjen är en ellips.

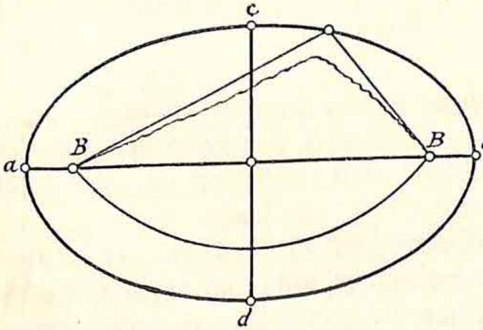


Fig. 2 a

Bland övriga sätt för ellipsens framställning är följande vid vanlig ritning lämpligt.

Att upprita en ellips, då båda axlarna äro givna. Fig. I. Pl. IV.

ab och *cd* äro axlarna. Slå cirklar med axlarna till diametrar. Genom de båda punkterna *g* och *h*, där en

godtycklig radie skär dessa cirklar, dragas linjer parallella med stor- och lillaxeln, varigenom erhålles skärningspunkten *s*, tillhörande kroklinjen. På samma sätt finnas flera punkter, vilka sammanbindas, först på fri hand och därefter medelst mall.

Anm. Ofta kan, då noggrannhet är mindre av nöden, ellipsen ersättas av den på *Pl. III fig. 4* visade ovalen. Härigenom vinnes, att uppdragandet av cirkelbågar träder i stället för det för nybörjare svårare ritandet med mall. Ju mera axlarna i storlek närma sig varandra, desto större bliver likheten mellan ellipsen och den nämnda ovalen.

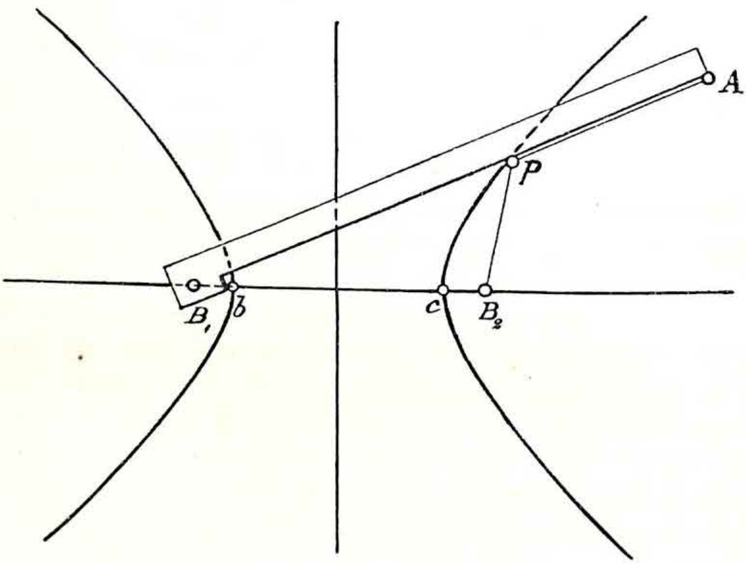


Fig. 3

*Att genom en punkt **p** på ellipsen draga en tangent.*

Sammanbind brännpunkterna *B*, *B* med *p* och dela den yttre av de därvid bildade vinklarna mitt itu. Mittlinjen *t* är tangent till ellipsen.

Utdrages sammanbindningslinjen mellan tangeringspunkten *p* och medelpunkten *m*, tills den råkar ellipsen i punkten *q*, så är tangenten i *q* parallell med tangenten i *p* och dessutom parallell med konjugatdiametern till *pq*.

Hyperbel. Textfig. 3.

En öppen plan kroklinje, bestående av två grenar, så beskaffade att *skillnaden* mellan avstånden från en god-

tycklig punkt p på någon av dem till två fasta punkter B_1, B_2 alltid är densamma. De två fasta punkterna kallas hyperbelns *brännpunkter*. Mitt emellan brännpunkterna ligger hyperbelns *medelpunkt*, och alla genom denna dragna linjer kallas *diametrar*. Hyperbelns *konjugatdiametrar* hava samma egenskaper som ellipsens. Den diameter, på vilken brännpunkterna äro belägna, kallas hyperbelns *transversalaxel* och skär hyperbeln i två punkter, hyperbelns *spetsar*. Vinkelrätt mot transversalaxeln går *konjugataxeln*.

Hyperbelns ovan nämnda egenskap kan användas för att medelst stift och snöre upprita densamma, textfig. 3.

Om nämligen vid ändan A av en kring den ena brännpunkten B_1 vridbar stång fästes ett snöre, vars andra ända är fästad i andra brännpunkten B_2, så beskriver ett stift, som under stångens vridning föres längs densamma utefter det spända snöret, en hyperbel. Ty för varje punkt p på den uppritade kroklinjen är skillnaden $pB_1 - pB_2$ alltid densamma, nämligen = skillnaden mellan stångens längd och snörets längd. Skall hyperbeln hava de givna punkterna b och c såsom spetsar, så tages denna konstanta skillnad = sträckan bc. Genom att flytta vridningspunkten till B_2 erhålles hyperbelns andra gren.

Parabel. Textfig. 4.

En öppen plan kroklinje, så beskaffad, att avståndet från en godtycklig punkt p på densamma till en fast linje l i planet är lika stort som avståndet från p till en fast punkt B. Den fasta linjen kallas parabelns *styrlinje*, den

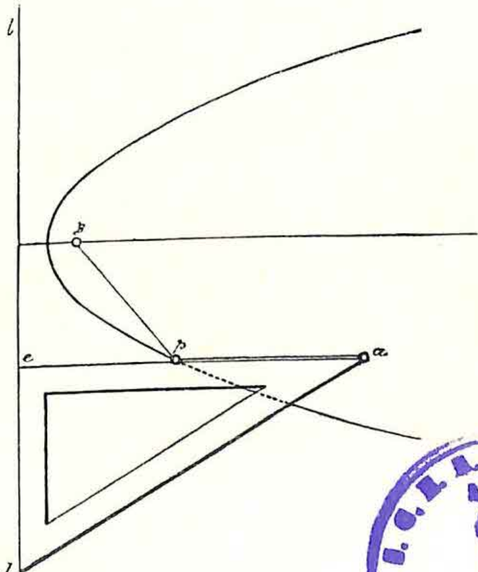


Fig. 4

fasta punkten dess *brännpunkt*. Den genom brännpunkten vinkelrätt mot styrlinjen dragna obegränsade linjen är *parabelns axel*, den *mitt emellan* styrlinjen och brännpunkten belägna punkten dess *spets*. Parabelns *diametrar* äro parallella med axeln.

Parabelns ovan nämnda egenskap kan användas vid uppritandet av kroklinjen på följande sätt, textfigur 4.

Brännpunkten *B* och styrlinjen *ll* antagas vara givna. Lägg en vinkelhake utefter *ll* och fäst vid dess ena spets *a* en tråd, vars längd är = vinkelhakens sida *ae*. Trådens andra ända fastgöres medelst en nål i brännpunkten *B*, varefter vinkelhaken förskjutes utefter styrlinjen, under det tråden ständigt hålles spänd medelst ett stift *p*. Den därvid av stiftet uppritade kroklinjen är en parabel.

Parabeln kan uppritas utan användande av brännpunkt och styrlinje på följande av *fig. 2, Pl. IV* visade sätt.

Axeln *as*, spetsen *s* och en godtycklig punkt *c* på parabeln äro givna.

Fullborda rektangeln *sacb*. Dela *bs* och *bc* i lika många, t. ex. 10, lika stora delar och numrera såsom *fig. 2* visar. Sammanbind *s* med delpunkterna på *bc* och drag genom punkterna på *bs* linjer parallella med axeln. De punkter, i vilka dessa linjer skära dem, som från *s* gå till motsvarande delpunkter på *bc*, tillhöra parabeln. På liknande sätt kan den på andra sidan om axeln befintliga parabelhälften bestämmas.

*Att genom en punkt **p** på parabeln draga en tangent.*

Drag från *p* en mot axeln vinkelrät linje *pq* och en likaledes vinkelrät linje genom spetsen *s*. Avsätt från *s* ett stycke *sr* = halva *pq*. Då är sammanbindningslinjen *pr* en tangent till parabeln.

Drages från *r* en linje vinkelrätt mot tangenten *pr*, så avskäres på axeln brännpunkten *B*.

§ 6. Skalor m. m. Pl. V

Vid avsättning och uppmätning av mått på ritningar användes en bestämd *måttstock* eller skala. Oftast ut-

föres ritningen ej i *full* eller *verklig storlek*, utan mindre än den figur, som avbildas, och man säger då, att skalan är *förminskad*; i motsatta fall kallas skalan *förstorad*. Att rita i t. ex. $^1/_{20}$ skala betyder: att låta varje längd på ritningen föreställa 20 gånger större längd i verkligheten.

Att upprita en s. k. enkel skala i $^1/_{100}$ av verkliga storleken. Fig. 1.

Drag en vågrät linje *ab* och avsätt på densamma från *a* åt höger t. ex. 10 centimeter. Skriv vid *a:* 0 och vid *b:* 10 *meter*. Varje centimeter på skalan föreställer då en meter i verkligheten. Avsätt vidare från *a* åt vänster 1 centimeter, dela densamma i 10 lika delar och skriv vid ändpunkten: *dm* 10 (betyder decimeter 10). Därpå numreras hela skalan såsom *fig. 1* visar.[1]

För prydlighetens skull kan tätt under skalans linje ytterligare en grövre linje uppdragas.

Att upprita en s. k. sammansatt skala i $^1/_{25}$ av verkliga storleken. Fig. 2.

En sammansatt skala kännetecknas därav, att på densamma en decimaldel mera än på den enkla skalan kan avläsas.

För att utföra den begärda sammansatta skalan i $^1/_{25}$ av verklig storlek, ritas först den tillhörande enkla skalan. Detta tillgår på följande sätt. Tag i passaren 4 cm, som motsvara $4 \times 25 = 100$ cm $= 1$ meter i verkligheten, och avsätt denna längd på en vågrät linje t. ex. 2 gånger åt höger från *a* till *b*[2] samt en gång åt vänster från *a* till *c*. Skriv vid *a:* 0, vid *b: 2 meter* och vid *c: dm 10*. Dela *ac* i 10 lika delar och numrera såsom *fig. 2* visar. Drag i *c* en mot *bc* vinkelrät linje och avsätt på densamma en *godtycklig längd* 10 gånger samt drag genom delpunkterna vågräta och genom den enkla skalans delpunkter till höger om *a* vinkelräta linjer. Upprita slutligen genom delpunkterna till vänster om *a* sneda linjer i enlighet med *fig. 2*, så är den sammansatta skalan färdig.

---

[1] För att ej erhålla för liten figur må lärjungen hellre avsätta t. ex. 20 centimeter från *a* till *b*. Då skrives naturligtvis vid *b: 20 meter*.

[2] Lärjungen bör hellre avsätta denna längd 3 gånger åt höger från *a*. Vid *b* bör då skrivas *3 meter*.

På en dylik skala kan exempelvis ett sådant mått som 2,63 meter noggrant tagas, medan på den tillhörande enkla skalan endast 2,6 meter kan noggrant tagas, och den andra decimalen 3 måste uppskattas efter ögonmått.

Obs.! ***Varje geometrisk ritning, som föreställer ett verkligt föremål, bör förses med skala.***

Att avbilda en plan figur i oförändrad storlek. Fig. 3.

Figuren 1234567 skall avbildas i verklig storlek. Man kan då, genom att sammanbinda motstående hörn, erhålla trianglar, vilka avbildas såsom *fig. 6, Pl. II* visar. Ett annat sätt är det följande. Drag en rät linje *ab* och däremot vinkelräta linjer från figurens hörn. På en annan rät linje *fg* tages en godtycklig punkt *f*, från vilken stycken avsättas, som äro lika stora med längderna 1′2′, 1′ 3′, 1′ 4′,. . . o. s. v., varpå genom de sålunda bestämda punkterna dragas mot *fg* vinkelräta linjer, lika långa som motsvarande linjer i den givna figuren.

Att avbilda en plan figur i en viss del, exempelvis ⁵/₇ av den verkliga storleken. Fig. 4 och fig. 6.

Härmed menas att varje längd i den sökta figuren skall vara $^5/_7$ av motsvarande längd i den givna. Man använder då en s. k. *proportionsskala.* Avsätt på en vågrät linje, *fig. 5*, sju lika stora delar och från delpunkten *o* en annan linje *oc* av godtycklig längd och riktning. Sammanbind *c* med punkterna 7 och 5 samt upprita vågräta linjer på sätt *fig. 5* visar. Skall nu t. ex. linjen *ab* på den givna figuren *4* avbildas i $^5/_7$ av sin verkliga storlek, så inpassas längden *ab* på någon av de horisontala linjerna, eller om detta ej är möjligt mellan två av dem, t. ex. i *kl.* Stycket från *k* till *s* är då det sökta. Alla övriga mått finnas på liknande sätt.

Vid uppritandet av en figur böra först huvudmåtten, figurens hela höjd och bredd, noggrant bestämmas, och därefter de mindre måtten inpassas.

Kap. III. **Projektionslära**

§ 1. Några stereometriska satser

Stereometri kallas läran om kroppars geometriska egenskaper.

1) *Polyeder* (*plansiding*) är en kropp, som begränsas av plana ytor. De allmännaste plansidingarna äro *prisman*, *parallellepipeden* och *pyramiden*.

2) *Prisma* kallas en kropp, som begränsas av två parallella, kongruenta månghörningar och lika många parallellogrammer, som vardera månghörningen har sidor. De två månghörningarna kallas prismans *baser*, parallellogrammerna dess *sidor*. Vinkelräta avståndet mellan baserna kallas prismans *höjd*. Sammanbindningslinjen mellan basernas mittpunkter benämnes *axel*. Är axeln vinkelrät mot baserna, kallas prisman *rät*, i annat fall *sned*. Med hänsyn till sidokanternas antal kallas prisman *trekantig*, *fyrkantig*, *femkantig* o. s. v.

3) *Parallellepiped* kallas en prisma, som begränsas av sex plan, av vilka två och två äro sinsemellan parallella. De sex sidoplanen äro *parallellogrammer*, av vilka de, som stå emot varandra, äro kongruenta. Parallellepipeden har *tolv kanter* och *åtta hörn*. Om sidoplanen äro kvadrater, kallas parallellepipeden *kub*.

4) *Pyramid* kallas en kropp, som begränsas av en månghörning såsom bas och lika många sammanlöpande trianglar som basen har sidor. Vinkelräta avståndet mellan basen och sidokanternas skärningspunkt, *spetsen*, kallas pyramidens *höjd*. Ligger spetsen på den vinkelräta linjen genom basens mittpunkt, kallas pyramiden *rät*, i annat fall *sned*. Med hänsyn till sidornas antal benämnes pyramiden *trekantig*, *fyrkantig*, *femkantig* o. s. v.

5) *Runda kroppar* äro sådana kroppar, som helt eller delvis äro begränsade av *buktiga ytor*. De allmännaste runda kropparna äro *cylindern*, *konen* och *sfären*. Se vidare kapitlet IV om Runda kroppar.

§ 2. Projektionslärans uppgift. Horisontal- och vertikalprojektion

Vi hava i det föregående uteslutande sysselsatt oss med konstruktioner i *ett plan*. Vi övergå nu till *avbildandet av verkliga föremål medelst plana figurer*. Detta avbildande är *projektionslärans* närmaste uppgift.

Antag *två* mot varandra vinkelräta plan, det ena vågrätt, det andra lodrätt, textfig. 5, samt i öppningen mellan dem en triangel ABC. Om nu från triangelns hörn lodlinjer dragas mot det vågräta planet, så erhållas tre punkter a, b, c, vilkas sammanbindningslinjer likaledes bilda en triangel. Den senare kallas då en *avbildning* eller projektion av den förra, och särskilt en *horisontalprojektion*, emedan planet, på vilket avbildningen uppstått, är *horisontalt*. De nedförda lodlinjerna kallas *projektionsstrålar* eller *projicierande linjer*, och själva planet benämnes det horisontala projektionsplanet eller kort *horisontalplanet*.

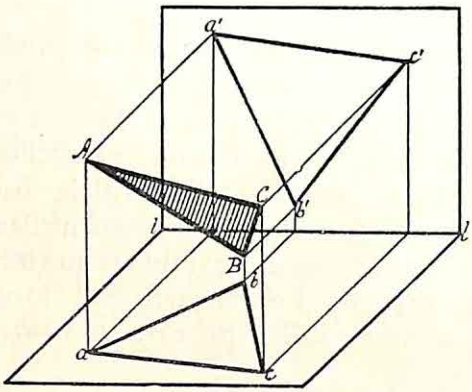


Fig. 5

På liknande sätt erhålles genom projektionslinjer, vinkelräta mot det *vertikala* planet, en *vertikalprojektion* $a'b'c'$, och själva planet kallas kort *vertikalplanet*. Avskärningslinjen mellan projektionsplanen kallas *grundlinje*.

Eftersom de båda projektionerna erhållits medelst *parallella* projektionsstrålar, som dessutom äro *vinkelräta* mot projektionsplanen, kallas de även *vinkelräta parallellprojektioner*.

De sålunda funna avbildningarna på horisontal- och vertikalplanet giva tillsammans en riktig föreställning om den givna triangelns utseende och läge. *Omvänt* kunna vi därför av trianglarna *abc* och $a'b'c'$, uppritade på två

dylika i rät vinkel hopställda plan, bestämma den verkliga triangeln *ABC*.

Då vi emellertid ej utföra våra ritningar på ett vinkelformigt ritbräde utan på ett enda plan, måste vi i enlighet härmed ändra den nu tänkta anordningen. Detta sker på följande sätt.

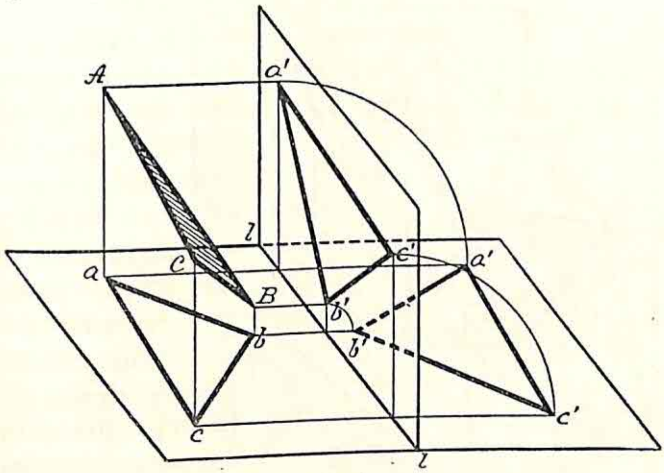


Fig. 6

Vi föreställa oss vertikalplanet med den därpå befintliga avbildningen, i enlighet med fig. 6 vridet omkring grundlinjen så länge, tills det sammanfaller med horisontalplanet och båda planen bilda ett enda sammanhängande plan. Detta kallas *konstruktionsplanet* och motsvaras av det uppspända ritpapper, på vilket ritningen utföres.

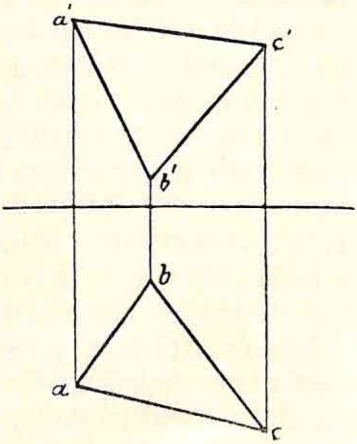


Fig. 6 a

Efter verkställd vridning hava de båda projektionerna av den givna triangeln *ABC* det utseende, som vidstående figur 6 a visar.

En bestämd punkts horisontal- och vertikalprojektioner ligga i konstruktionsplanet på samma,

mot grundlinjen vinkelräta linje. Vidare framgår av figurerna:

Avståndet från en punkt i vertikalprojektionen till grundlinjen är lika med den verkliga punktens höjd över horisontalplanet. Avståndet från en punkt i horisontalprojektionen till grundlinjen är lika med den verkliga punktens avstånd från vertikalplanet.

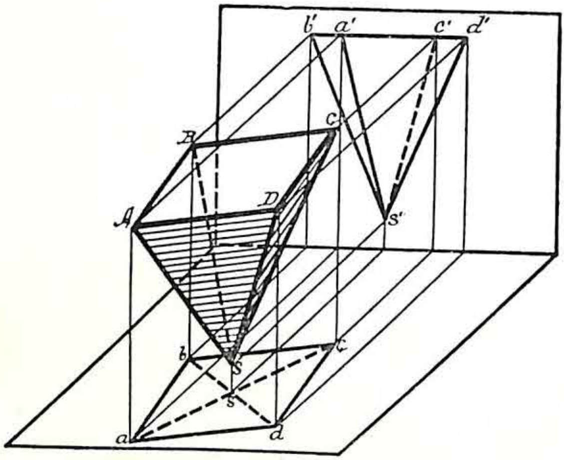


Fig. 7

Liksom vi avbildat eller projicierat en triangel, kunna vi avbilda andra rät- och kroklinjiga figurer samt även kroppar. Sålunda bliver horisontalprojektionen av den lodräta, nedåt vända pyramiden *SABCD* i fig. 7 en parallellogram *abcd* med diagonalerna *ac* och *bd*, vertikalprojektionen däremot en triangel *b'd's'* jämte linjerna *a's'* och *c's'*. Efter det vi i tankarna nedlagt vertikalplanet, får ritningen det utseende fig. 8 visar.

Man iakttage, att sidokanten *CS* på vertikalprojektionen blivit framställd genom den *prickade* linjen *c's'*, under det övriga sidokanter avbildas medelst heldragna linjer. Meningen härmed är följande.

Vid varje föremål, som på ovan visat sätt avbildas, begränsa de yttersta projektionslinjerna en *åt* projektionsplanet och en annan *från* planet vänd del. I fig. 7 äro sålunda de båda sidoytorna *BCS* och *CDS* vända *åt*, de två övriga sidoytorna *från* vertikalplanet. Tänker man sig i projektionsstrålarnas riktning ett oändligt långt bort framför vertikalplanet befintligt öga, kan för detta öga naturligtvis endast den *från* vertikalplanet vända delen bliva synlig. Man kallar därför denna del föremålets

främre del, den *åt* planet vända delen däremot dess *bakre* del. För ett sådant tänkt öga *skymmas* alla på den bakre delen befintliga linjer av den främre delen, *de bliva osynliga. Att en linje är osynlig utmärkes genom att rita dess projektion prickad.* Linjen *c's'* i vertikalprojektionen fig. 7 och fig. 8 är alltså prickad, emedan den verkliga linjen *CS* skulla vara osynlig för ett öga, som i projektionslinjernas riktning betraktar pyramiden.

Vad som nu blivit sagt om vertikalprojektionen gäller även om ett föremåls horisontalprojektion. Vi hava därvid endast att tänka oss ett öga, som från ett oändligt avstånd rätt *uppifrån* betraktar föremålet. För ett sådant öga är parallellogrammen *ABCD* i fig. 7 pyramidens övre del alltså synlig, medan sidoplanen och deras kanter bliva osynliga. I horisontalprojektionen framställas därför dessa kantlinjer *prickade*.

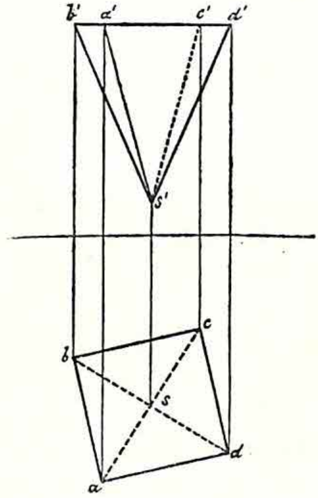


Fig. 8

En linje, som i förhållande till ena projektionsplanet är synlig, alltså på motsvarande projektion heldragen, behöver naturligtvis därför icke vara synlig resp. heldragen på andra projektionen. Så se vi uti fig. 8, att kantlinjen *a's'* är heldragen, men dess samhöriga horisontalprojektion *as* prickad.

I de följande projektionsritningarna iakttaga vi, jämte de redan förr å sid. 9 givna, nedanstående beteckningsregler.

1) *Synliga* linjer ritas, såsom nämnt, *heldragna; osynliga* linjer *prickade*.

2) De linjer, som förena samhöriga punkter i de olika projektionerna, ritas med ytterst fina, svarta streck.

3) Grundlinjen ritas såsom en fin, svart linje.

4) Samhöriga projektioner förses i text och figurer, så vitt möjligt, med samma bokstäver, som åtskiljas genom en punkt, varjämte vertikalprojektionerna utmärkas med ett streck. Bokstäverna *a.a'* betyda sålunda i det följande de samhöriga horisontal- och vertikalprojektionerna av en bestämd punkt *A*. Vid uppskrivandet av de båda projektionerna sättes horisontalprojektionen främst. Den i fig. 8 framställda pyramiden betecknas exempelvis: *sabcd.s'a'b'c'd'*.

Vid projektionslärans tillämpningar på teknisk ritning brukar man ofta i stället för orden horisontalplan och horisontalprojektion använda *grundplan* och *planritning*. I stället för vertikalprojektion begagnas också uttrycket *höjdritning*.

§ 3. Modellritning. Pl. VI och Pl. VI a

Innan vi gå vidare i behandling av projektionslärans olika uppgifter, måste det redan genomgångna väl inpräglas, genom att vi tillämpa detsamma på avbildandet av ett eller annat verkligt föremål. Härtill användas bäst enkla trämodeller av prismatisk eller pyramidisk grundform, vilka avbildas i verklig storlek — alltså skala = 1 : 1.

Antag t. ex. att den på *Pl. VI* visade prismatiska modellen skall framställas till sina projektioner i två olika ställningar. I den första ställningen skola två av dess sidoplan vara parallella med vertikalplanet, i den andra bilda sidoplanen sneda vinklar mot vertikalplanet.

Arbetets gång är då följande. Sedan ritningens ram och grundlinjen *ll uppritats*, konstrueras första ställningens horisontalprojektion, *varvid måtten medelst meterstock tagas omedelbart på modellen*. Denna horisontalprojektion utgöres i det här på *Pl. VI* antagna fallet av en kvadrat, i vilken en annan kvadrat är inskriven. Härefter uppdragas från alla punkter på horisontalprojektionen linjer, vinkelräta mot grundlinjen, och på dessa linjer avsättas, från grundlinjen uppåt, modellens höjdmått, varigenom vertikalprojektionen framkonstrueras.

Sedan sålunda de båda projektionerna av modellen i

dess första ställning blivit bestämda, avbildas densamma i den andra ställningen. Horisontalprojektionen ändrar därvid icke utseende, utan kan avtecknas från föregående *fig. 1* i oförändrad form och storlek, men i sned ställning mot grundlinjen. Från den nya horisontalprojektionens punkter föras linjer vinkelräta mot grundlinjen, och genom den första vertikalprojektionens punkter dragas linjer parallella med grundlinjen. De vågräta linjernas skärning med de motsvarande vinkelräta linjerna bestämma modellens nya vertikalprojektion, *fig. 2*. I första ställningen, *fig. 1*, äro alla linjer heldragna, emedan modellens synliga kanter täcka de osynliga, däremot måste i andra ställningen åtskilliga linjer, exempelvis $a.a'_1a'$, såsom tillhörande den skymda delen, prickas.

Pl. VI avser att visa, dels en lämplig modellform, dels huru ritningen i huvudsak bör anordnas; men lärjungen får naturligtvis ej omedelbart avteckna bokens plansch utan måste arbeta med själva modellen. Ett ytterligare exempel på projektionsritning efter en enkel modell hava vi framställt på *Pl. VI a*. Några förklaringar torde efter det ovan sagda vara onödiga.

Formatet till båda dessa planscher är det undre av de på sid. 7 angivna.

Anm. Därest tiden sådant medgiver, är här rätta tillfället att rita flera enkla modeller.

§ 4. Användning av flera projektionsplan. Sidoprojektioner. Pl. VII

Ofta äro *två* projektioner otillräckliga för det tydliga framställandet av ett föremål. Man inför då ett nytt projektionsplan, på vilket föremålet ytterligare projicieras.

Antag t. ex. att den i textfig. 9 framställda, trekantiga, vågräta prisman *ABCFED* skall avbildas. De på vanligt sätt bestämda projektionerna *acfd* och *a'c'f'd'* giva ingen tydlig föreställning om prismans verkliga utseende, ty dessa projektioner kunna ju även tillhöra t. ex. en 4-kantig prisma. För den skull införa vi ett nytt vertikalt projektionsplan *kljm*, parallellt med basen *ABC*, på vilket en ny bild konstrueras. Därefter tänkes planet

vridet omkring sin skärningslinje *km* med vertikalplanet, tills det sammanfaller med detta, varefter de båda vertikalprojektionerna på vanligt sätt bringas i konstruktionsplanet. Prismans projektioner få då slutligen det utseende textfig. 10 visar. Den nya bilden *a''b''c''* kallas *sidoprojektion* eller *sidoritning*.

I stället för att vrida det nya projektionsplanet *kljm* kring dess skärningslinje *km* med vertikalplanet kan man

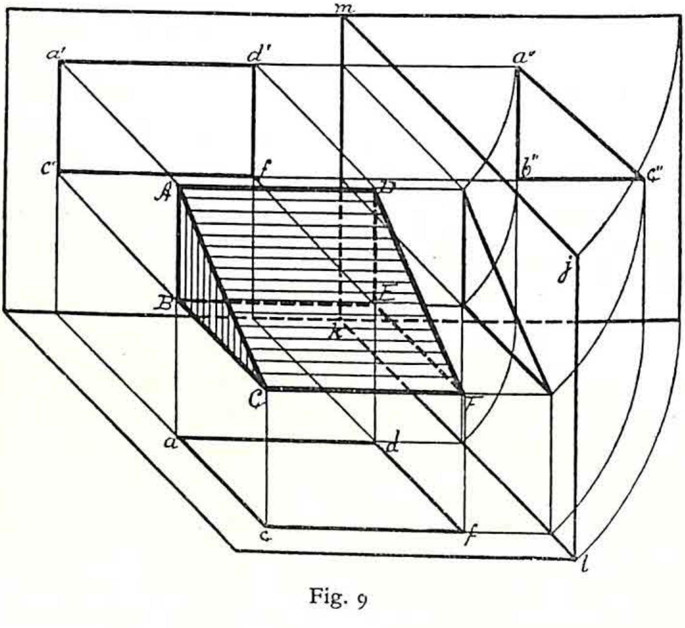


Fig. 9

också vrida detsamma kring dess skärningslinje *kl* med *horisontalplanet*. Sidoprojektionen infaller då i horisontalplanet, och bilden får det utseende, som omstående fig. 11 visar. Vilken av dessa vridningar som bör företagas, beror på uppgiftens beskaffenhet och utrymmet.

I det nu visade exemplet står det nya projektionsplanet vinkelrätt mot *båda* projektionsplanen. Ofta är det emellertid nödvändigt att använda ett tredje projektionsplan, som *icke* står vinkelrätt mot båda projektionsplanen.

Om t. ex. en vågrät 5-kantig prisma i ett mot vertikalplanet snett läge skall avbildas, så måste först ett

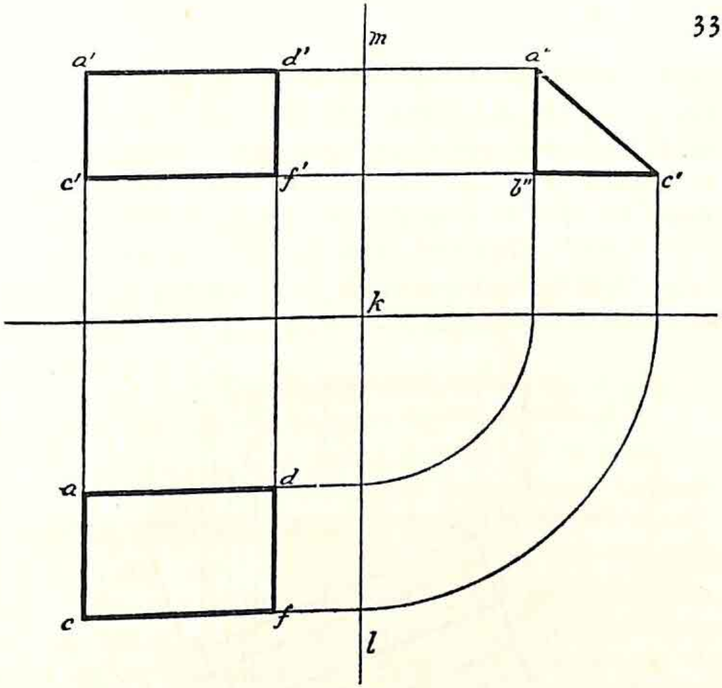


Fig. 10

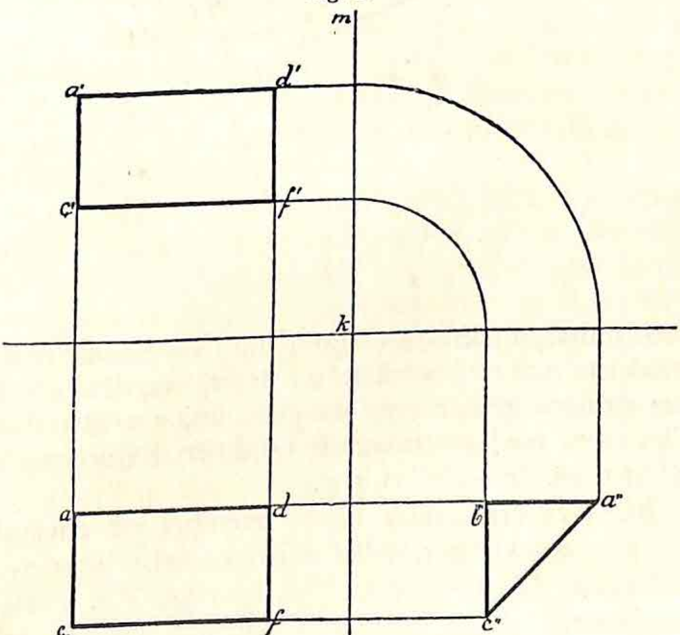


Fig. 11

tredje projektionsplan införas, som är vinkelrätt mot prismans längdriktning. Detta plans avskärningslinje med horisontalplanet må vara den mot längdriktningen vinkelräta linjen *kl* i fig. 12 här nedan. Nu uppritas den på horisontalplanet nedlagda sidoprojektionen *a''b''c''d''e''* enligt *fig. 10* på *pl. II*, och ur denna projektion härledas sedermera de båda övriga projektionerna.

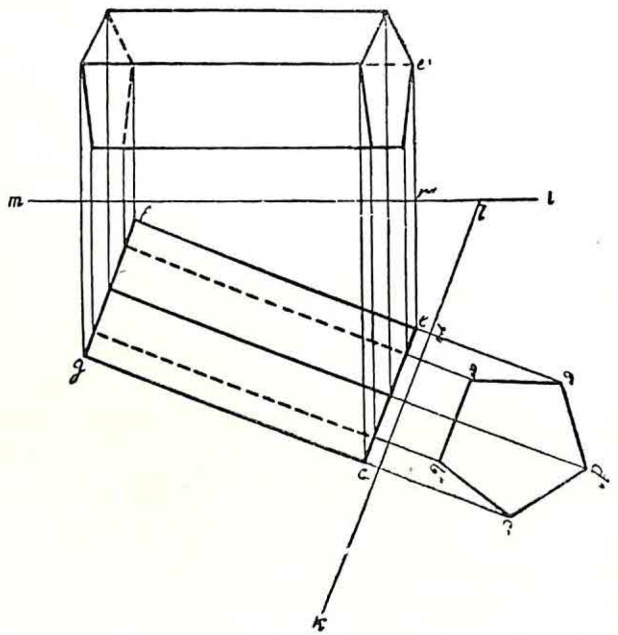


Fig. 12

Horisontalprojektionen *efgc* i fig. 12 finnes omedelbart medelst mot *kl* vinkelräta linjer, vertikalprojektionen konstrueras genom att från grundlinjen avsätta höjdmått, lika stora med motsvarande höjdmått i sidoprojektionen. Så är t. ex. $e'r' = e''r''$ o. s. v.

Pl. VII framställer några exempel på användningen av sidoprojektioner, vilka exempel helst böra av eleven behandlas *på grund av verkliga modeller*. *Fig. 1* visar projektionerna av ett mot vertikalplanet lutande kors. Såsom givet antages här: korsets dimensioner och dess lutningsvinkel, t. ex. 30° mot vertikalplanet. På grund härav

uppritas först sidoprojektionen, vilken antages vara vriden omkring det tredje projektionsplanets skärningslinje *km* med vertikalplanet. Ur sidoprojektionen erhållas sedermera de båda övriga projektionerna, vid vilkas uppritande de icke på sidoritningen synliga dimensionerna tagas omedelbart på modellen eller efter uppgivna mått.

Fig. 2 visar projektionen av en rät kvadratisk pyramid, med given bas och höjd, som med sin ena sida vilar på horisontalplanet.

Vi antaga här, att sidoprojektionen $s''a''b''$ blivit omedelbart nedlagd på horisontalplanet omkring linjen *kl*. Ur sidoprojektionen, i vilken pyramidens höjd och bassida synas i sina verkliga, av modellen givna mått, härledas lätt de övriga projektionerna.

Slutligen visar *fig. 3* projektionerna av två parallellepipeder, den ena vågrätt liggande på horisontalplanet, den andra lutande mot den första. Uppritningen verkställes medelst ett tredje projektionsplan, som här är vinkelrätt mot den vågräta parallellepipeden. Projektionsplanets skärning med horisontalplanet bliver då en linje *kl* vinkelrät mot längdriktningen *ab* och sidoprojektionen, i vilken parallellepipedernas dimensioner synas i verklig storlek, tänkes vriden omkring denna linje samt nedlagd på horisontalplanet.

Ur sidoprojektionen härledes omedelbart horisontalprojektionen medelst mot *kl* vinkelräta linjer; vertikalprojektionens punkter ligga lika högt över grundlinjen som motsvarande punkter i sidoprojektionen ligga över linjen *kl*. Således $b'r'=b''r''$; $n's'=n''s''$ . . . o. s. v. Med ledning av de nu visade konstruktionerna kunna mångfaldiga uppgifter lösas rörande projektioner av *föremål, som luta mot projektionsplanen.*

§. 5. Krokiteckning jämte därpå grundad projektionsritning efter verkliga föremål

Med kroki menas en till huvudsaklig del på fri hand efter ögonmått utförd skiss, vilken, efter inskrivning av

de verkliga måtten, kan läggas till grund för en noggrann geometrisk bild.

Vid krokiteckningen bör alltid huvudvikten läggas därpå, att den färdiga skissen blir så tydlig och så fullständig, att man, utan hjälp av själva det avbildade föremålet, kan åstadkomma de behövliga geometriska projektionerna. Såsom underlättnad för detta slag av teckning, kan med fördel användas vanligt i handeln förekommande rutat papper, med blå eller vattentryckta kvadratrutor om 5—6 mm sida. Ett blad i en vanlig anteckningsbok kan också användas.

Vid måttsättningen iakttages, att intet mått glömmes, som för utförandet av modellen är nödvändigt. Likväl få ej så många mått insättas, att skissen blir otydlig och förståendet av teckningen försvåras.

Förutom med ovan omtalade rutade papper, bör krokitecknaren vara försedd med *blyertscirkel* för ev. cirkelbågar samt *meterstock*.

Teckningen göres i regel först i blyerts; dock blir den tydligare och klarare, om blyertskonturerna ifyllas med bläck- eller tuschpenna och måttlinjer och siffror skrivas med blyerts eller spetsig färgpenna.

Kroki av ritbord med stol. Arbetets gång är följande: sidoprojektionen av bordet tecknas först, därefter framsidan och sedan stolen, ställd mellan de båda andra projektionerna. Teckningen bör helst göras på fri hand. När teckningen är färdig, börjar måttsättningen, de större måtten först. Använd aldrig klammer för att utmärka ett mått utan *räta måttlinjer*. Där måttet börjar och slutar, göres en pilspets; se vidstående kroki! Se till, att alla siffror skrivas så, att de *läsas rätt i måttets längdriktning;* många misstag undvikas härigenom.

Är modellen, såsom här är fallet, av trä, undersökas först virkesdimensionerna. I detta fall förekomma tre virkesdimensioner: ¾ (tre kvart) tums[1] bräder i bordskivan, hyllan och fotstegsbrädan; 1 tums bräder i sarg, stolsits, hyllstöd och fotsteg å stolen; bords- och stols-

[1] I virkesmått förekommer ännu det gamla måttsystemet med tum och fot.

ben äro av grövre virke. Hyvlat ¾ tums trä beräknas ha en tjocklek av 2 cm och 1 tums trä beräknas till 2,5 cm.

När krokin är uppтecknad och måtten så fullständigt som möjligt inskrivna å densamma, bör man tänka på i vilken skala den slutgiltiga ritningen skall utföras. Proportionen 13 cm = 1 m har visat sig vara lämplig till det ritningsformat vi använda. Upprita således en enkel skala, där 13 cm svara mot 1 m och utför arbetet med tillhjälp

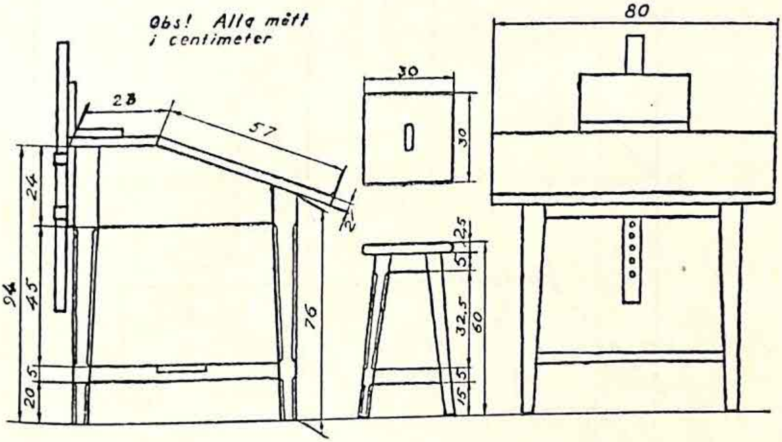


Fig. 13

av denna. *Pl. VIII. Ritning till ritbord med stol utförd efter kroki.*

Sedan ritningen fullbordats, förser man den med *materialbeteckning.* Detta kan ske antingen med färg eller med streckning, imiterande träets ådring, eller både med färg och streckning.

Pl. IX. Ritning till putshyvel utförd efter kroki. Planschen är utförd i skala 1:2, d. v. s. i halv storlek. Vid utförandet av ritningen kan man, om utrymme därtill finnes, hellre rita verktyget i hel storlek.

Den röda linjen å horisontalprojektionen betecknar, att hyveln är skuren av ett lodrätt plan. Härigenom förtydligas i vertikalprojektionen hyveljärnets anordning och fastsättning. Såsom av planschen framgår, utföres den med materialbeteckning i färg. Beteckningen för stål är »preussiskt blått» med tillsats av något litet karmin.

Om tiden sådant medgiver, böra flera olika uppgifter inom denna för det praktiska livet mycket viktiga art av teckning utföras. Lämpliga föremål äro verktyg, maskindelar, möbler samt en uppgift som alltid ligger nära till hands: uppmätning och planritning av ritsalen.

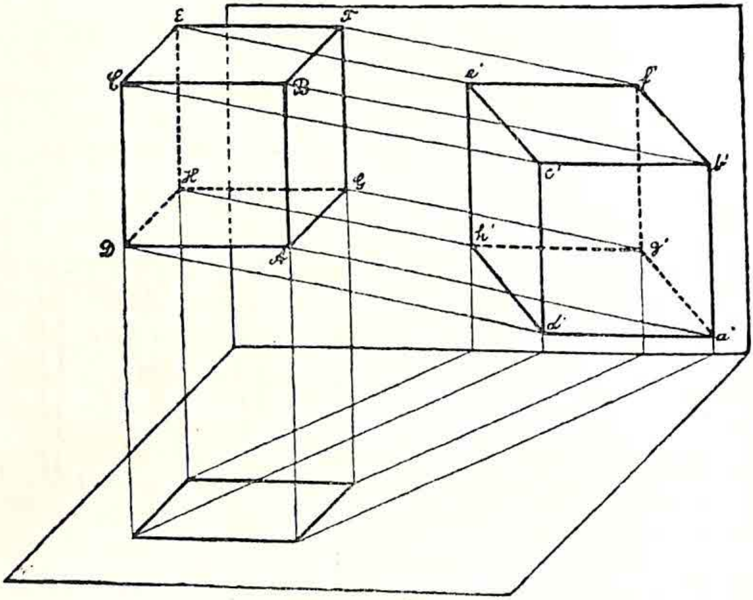


Fig. 14

§ 6. **Parallellperspektiv eller sned projektion. Pl. X**

I samband med föregående paragraf skola vi nämna något om ett avbildningssätt, enligt vilket man medelst *en enda projektion* kan giva en tydlig föreställning om det verkliga föremålet. Ett sådant avbildningssätt är den *sneda projektionen*. Den enklaste och allmännast använda sneda projektionen förtydligas av textfig. 14, framställande den sneda vertikalprojektionen av en kub. I stället för att såsom vid vanlig vinkelrät parallellprojektion draga projektionsstrålarna *vinkelrätt* mot projektionsplanen äro de uti fig. 14 dragna i *sned vinkel* mot

vertikalplanet. Man erhåller då på vertikalplanet en bild av kuben, för vilken följande allmänna regel är gällande:

Alla med vertikalplanet parallella linjer synas i verklig storlek och riktning. Alla mot vertikalplanet vinkelräta linjer synas på bilden i en storlek och riktning, beroende på de antagna projektionsstrålarnas riktning.

Vi kunna således upprita en kub i sned projektion så som fig. 15 visar. Här äro alla sådana linjer som $a'b'$, $b'c'$, $e'f'$, $f'g'$ ... i verklig storlek och riktning, men de mot vertikalplanet vinkelräta $a'g'$, $b'f'$, $c'e'$, $d'h'$, i godtycklig vinkel v och i godtycklig storlek, varvid man dock för åskådlighetens skull aldrig bör giva dem *större* längd än den verkliga.

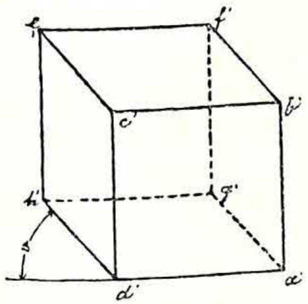


Fig. 15

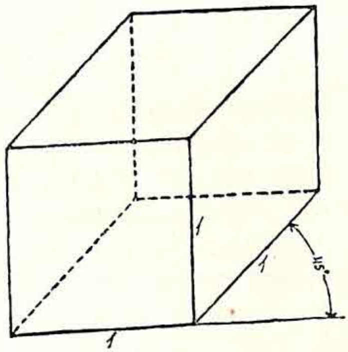


Fig. 16

En ganska vanlig sned projektion visar fig. 16, föreställande en kub. Härvid antagas projektionsstrålarna så, att alla mot vertikalplanet vinkelräta linjer synas i *verklig* storlek och med en vinkel $v=45°$. En annan även ledes vanlig anordning är, att de mot vertikalplanet vinkelräta linjerna tagas i 45° vinkel, men i hälften av verkliga storleken.

Såsom en tillämpning av det sagda må de sneda projektionerna av klotsarna fig. 1 och 2 på *pl. X* utföras.

I *fig. 1* är samma prismatiska modell tagen som på *pl. VI*, men uti en sned projektion, där vinkeln $v=30°$ och de mot vertikalplanet vinkelräta linjerna i halv storlek.

I *fig. 2* är den sneda projektionen tagen så, att $v=$

45° och de mot vertikalplanet vinkelräta linjerna i verklig storlek, liksom kuben i textfiguren 16. För erhållande av den sneda åttkanten uppritas först den med vertikalplanet parallella, således i verklig form och storlek framträdande åttkanten *12345678*, varigenom punkterna *1* och *8* bestämmas. De genom dessa punkter dragna 45° linjerna avskära på den sneda kvadratbilden *abcd* och dess diagonaler de för uppritandet av åttkanten nödiga punkterna.

§ 7. Härledning av linjers verkliga längd och figurers verkliga form ur projektionerna. Pl. XI

Konstruktionerna i föregående paragraf giva vid handen, att införandet av ett tredje projektionsplan är särskilt nyttigt, när det gäller avsättandet eller bestämmandet av linjers verkliga längd.

Av förklaringarna i början av kapitlet, liksom av textfigurerna på sid. 27, inses nämligen att:

En linjes projektioner äro i allmänhet kortare än linjen själv. Endast i det fall att linjen är parallell med ett av projektionsplanen, överensstämmer längden av projektionen på detta plan med linjens egen längd.

Skall därför den verkliga längden bestämmas av en linje, som står i sned vinkel mot båda projektionsplanen, kan detta ske genom att, på sätt i paragraf 4 blivit visat, avbilda densamma på ett nytt plan, som är parallellt med linjen och vinkelrätt mot något av projektionsplanen, varefter projektionen nedlägges på horisontal- eller vertikalplanet.

Betrakta vi sålunda det lutande korset *fig. 1* i *pl. VII*, så synas alla i sidoritningen förekommande dimensioner i sin verkliga storlek, emedan det plan, på vilket denna projektion utförts, är parallellt med de avbildade linjerna. Av samma skäl äro i sidoprojektionen, *fig. 2*, *pl. VII*, pyramidens huvuddimensioner i verklig storlek. Och i *fig. 3* synas likaledes den lutande parallellepipedens längd och tjocklek på sidoprojektionen i verklig storlek, emedan projektionsplanet är parallellt med dessa dimensioner. Vi

hava vid utförandet av *pl. VII börjat* med sidoritningarna och därur härlett horisontal- och vertikalprojektionerna, men *tydligt är, att man genom ett omvänt förfarande kan av färdiga horisontal- och vertikalprojektioner härleda sidoprojektionen och därmed även de verkliga måtten.*

Ett exempel på detta sätt att bestämma verkliga längden av en linje visar *pl. XI, fig. 1.* Projektionerna av en lodrät parallellepiped äro givna, uppgiften är att bestämma storleken av diagonallinjen $db.a'_1b'$.

Vi tänka oss då ett nytt vertikalt *med linjen parallellt* projektionsplan, vilket vi, för enkelhetens skull och till besparande av utrymme, lägga så, att dess skärning med horisontalplanet sammanfaller med linjens horisontalprojektion db. Avbilda vi diagonalen på detta plan och nedlägga planet jämte projektionen på horisontalplanet, så erhålla vi sidoprojektionen db_0. Vid nedläggningen förbliver nämligen punkten d orubbad och punkten $b.b'$ flyttar sig till b_0, som erhålles om bb_0 göres vinkelrät mot db och lika stor som $b'b'_1$. Linjen db_0 är den sökta verkliga längden. Det inses vidare lätt, att vinkeln v mellan db_0 och db angiver *den verkliga linjens lutning mot horisontalplanet.*

Ett annat mycket använt sätt att bestämma en linjes verkliga längd ur projektionerna är att *vrida själva linjen till parallell ställning med ett av projektionsplanen.* Förfaringssättet är visat i *pl. XI, fig. 2* vid bestämmandet av längden på sidokanterna till en sned pyramid.

Vi tänka oss härvid genom spetsen $s.s'$ en linje dragen vinkelrätt mot ett av projektionsplanen, t. ex. *horisontalplanet*, och vrida ena sidokanten $sa.s'a'$ kring denna linje $s.s'r'$ såsom axel, tills att sa i det nya läget $sa_0.s'a'_0$ bliver parallell med vertikalplanet. Då är $s'a'_0$ sidokantens verkliga längd. På samma sätt kunna alla övriga sidokanters längder genom omvridning bestämmas.

I *fig. 2* äro linjerna, vilkas verkliga längd sökes, vridna till parallell ställning med vertikalplanet. Man kan även lösa uppgiften genom att vrida dem till parallell ställning med horisontalplanet. I *fig. 3* äro projektionerna

av en lodrät 4-kantig pyramid givna, och sidoplanens verkliga form skall bestämmas. Vrida vi nu ena sidokanten *sa.s'a'* kring en *mot* vertikalplanet vinkelrät linje *ad.a'*, tills den infaller på horisontalplanet, så synes den i as_0 uti verklig storlek. Sammanbindes s_0 med *d*, framstår sidotriangeln s_0ad till verklig form och storlek.

Uppgifter liknande de nu behandlade förekomma mycket ofta, särskilt då den geometriska ritningen skall läggas till grund för utförandet av verkliga föremål.

§ 8. Polyedrars skärning och sidoplanens utbredning. Pl. XII

Avskäres en plansidig kropp av ett plan, bliver skärningen en rätlinjig figur. Endast om det skärande planet är parallellt med något av projektionsplanen, framstår skärningen uti motsvarande projektion till verklig form och storlek. För att i andra fall finna begränsningslinjernas verkliga storlek och figurens verkliga form, kunna vi tillämpa något av de i föregående paragraf omnämnda sätten. Ligger figuren vinkelrätt mot ett av projektionsplanen, användes bäst det på *pl. XII* visade förfaringssättet, bestående däruti, att figuren vrides till parallell ställning med det andra planet.

Pl. XII, fig. 1 föreställer en lodrät prisma, som upptill är snett avskuren medelst ett mot vertikalplanet vinkelrätt plan. Prismans horisontalprojektion antages vara en oregelbunden 5-hörning *defgh*. Skärningen mellan prisman och det givna planet har till horisontalprojektion samma 5-hörning och till vertikalprojektion den räta linjen *d'e'f'g'h'*. För att finna skärningens verkliga form, vrida vi densamma kring en genom hörnpunkten *f.f'* gående, mot vertikalplanet vinkelrät linje *fx.f'*, tills figuren intager ett med horisontalplanet parallellt läge. Alla dess punkter beskriva då cirkelbågar, vilka i vertikalprojektionen framstå i verklig form, men i horisontalprojektionen synas såsom räta linjer. Högsta punkten *d.d'* infaller efter vridningen i $d_0d'_0$. På samma sätt bestämmas övriga punkters nya lägen. Punkten *f*, såsom

tillhörande vridningsaxeln, förbliver orubbad. 5-hörningen $fe_0d_0h_0g_0$ är skärningens *verkliga form*.

En kontroll på ritningens riktighet finna vi i följande: utdrages linjen *de*, tills den skär vridningsaxeln *jx* i punkten *x*, så måste tydligen denna punkt under vridningen förbliva orubbad, och således den nedlagda linjen d_0e_0 ävenledes, om den tillräckligt utdrages, gå genom densamma. Av lika skäl måste de båda samhöriga linjerna *gh* och g_0h_0 utdragna skära varandra i en punkt *y* på vridningsaxeln, likaså de båda linjerna *dh* och d_0h_0 i en annan på vridningsaxeln liggande punkt, vilken ej fått plats på planschen.

Det nu framställda sambandet mellan en plan figurs projektion på ett plan och dess nedläggning på planet är helt allmänt och kan uttryckas sålunda:

Motsvarande linjer i en plan figurs projektion och dess nedläggning skära varandra i punkter på nedläggningens vridningsaxel.

De olika samhöriga punkterna *e* och e_0, *d* och d_0, *h* och h_0 ligga på linjer, vinkelräta mot vridningsaxeln. Således:

Motsvarande punkter i en plan figurs projektion och dess nedläggning ligga på linjer, vinkelräta mot nedläggningens vridningsaxel.

Polyederplanens utbredning. Fig. 2.

Om de figurer, vilka begränsa en polyeder, framställas på konstruktionsplanet till sin verkliga form uti ett sammanhängande helt, uppstår en s. k. *utbredning*. En dylik utbredning är ofta nödvändig för det praktiska utförandet och giver den noggrannaste föreställning om de på ritningen visade figurernas utseende.

För att erhålla utbredningen av sidoplanen till den avskurna prisman avsätta vi på grundlinjen stycken, *1—2*, *2—3*, *3—4* o. s. v., som äro = horisontalprojektionerna *fe*, *ed*, *dh* . . . o. s. v.

Genom delpunkterna dragas lodlinjer lika långa som motsvarande kantlinjer i vertikalprojektionen, varefter de avskurna höjdpunkterna F_0, E_0, D_0. . . o. s. v. sammanbindas med en bruten linje. Hela figuren 1 $F_0E_0D_0H_0$ G_0F_0 61 utgör sidoplanens utbredning, i vilken de alla

synas i verklig form och storlek. För fullständighets skull har vid *fig. 2* fogats prismans bas och avskärning. Detta tillgår lättast så, att i nedläggningen $fe_0d_0h_0g_0$, *fig. 1*, punkten f eller g_0 (genom linjer, som ej blivit utsatta på planschen) sammanbindes med h_0, e_0 och d_0. Utgående från linjen G_0F_0 i *fig. 2* överför man sedermera de bildade trianglarna till utbredningen. Sammalunda med basen.

En god kontroll på ritningens noggrannhet är att linjerna fg_0, g_0h_0, h_0d_0 ... o. s. v. i *fig. 1* måste vara lika långa som motsvarande linjer F_0G_0, G_0H_0, H_0D_0 ... o. s. v. i *fig. 2*. Uppritas på papp eller plåt en figur lika med utbredningen, *fig. 2*, så kan genom hopvikning av densamma den i *fig. 1* avbildade prisman erhållas.

§ 9. Två polyedrars skärning med varandra. Utbredning av sidoplanen. Pl. XIII

Två plansidiga kroppars skärning med varandra kan till sina projektioner bestämmas på det sätt, att man tänker sig genom kantlinjerna lagda lodräta eller mot vertikalplanet vinkelräta plan och konstruerar de skärningar, som dessa s. k. *hjälpplan* alstra på polyedrarnas sidor. Skärningsfigurernas gemensamma punkter tillhöra den sökta skärningen. I *pl. XIII* visas två på olika sätt behandlade tillämpningar av denna allmänna regel.

Skärning mellan en liggande trekantig prisma och en lodrät parallellepiped. Fig. 1.

Sedan prismornas projektioner blivit uppritade, tänkes ett *vertikalt* hjälpplan lagt genom kanterna $h.h'h'_1$ och $i.i'i'_1$, alltså längs efter sidan $hi.h'i'$. Detta vertikala plan avskär på den liggande prisman en triangel $mvn.m'v'n'$, vilken med de lodräta kanterna bestämmer punkterna h'_1 och i'_1 på vertikalprojektionen. Likaså finnes genom ett annat vertikalt hjälpplan, triangeln $ltr.l't'r'$, som bestämmer skärningslinjens övriga tre punkter. Sammanbindningslinjen på vertikalprojektionen utgör den sökta skärningen, vilkens horisontalprojektion naturligtvis sammanfaller med prismans projektion $hikg$.

Sidoplanens utbredning. Fig. 2 och 3.

Avsätt på en horisontal linje JJ, *fig.* 2, stycken JV, VH, HG... o. s. v. $= iv$, vh, hg... o. s. v. i horisontalprojektionen. Från punkterna J, V, H... dragas vinkelräta linjer, vilkas längder bestämmas av vertikalprojektionen. Sålunda är $JJ_1 = i'i'_1$, $HH_1 = h'h'_1$... o. s. v. Anordnas utbredningen i jämnhöjd med vertikalprojektionen, erhållas de undre punkterna omedelbart genom vågräta linjer från vertikalprojektionen. Den sålunda uppritade figuren är utbredningen av den lodräta parallellepipedens övre del.

För att finna utbredningen av den liggande prismans sidoplan jämte tillhörande skärningslinjer, bestämma vi först verkliga längden av kantlinjerna ed och ef. Detta sker enklast medelst en tredje projektion de_1f, i vilken höjden ee_1 är $=$ linjen $e'f'$ i vertikalprojektionen. Nu uppritas rektangeln $a_0c_0d_0f_0$, varvid $b_0c_0 = e_1d$, $b_0a_0 = e_1f$ samt $a_0f_0 =$ prismans längd af.

Punkterna m_0 och n_0 samt l_0 och r_0 tagas på utbredningen i enlighet med horisontalprojektionerna m och n samt l och r, varefter skärningslinjens form i utbredningen lätt bestämmes, såsom *fig.* 3 visar.

En kontroll på ritningens noggrannhet ligger däruti, att hela längden av skärningslinjen i utbredningarna *fig.* 2 och *fig.* 3 måste vara densamma.

Skärning mellan en rät kvadratisk pyramid och en vågrät parallellepiped, anordnade såsom fig. 4 visar.

Tänka vi oss genom parallellepipedens kantlinjer lagda *vågräta* hjälpplan, så erhålles den sökta skärningslinjen på följande sätt. Hjälpplanet genom den översta kanten $ab.a'$ avskär på pyramiden en figur, vars ena hörnpunkt $o.o'$ omedelbart bestämmes av den vågräta linjen genom a' och som för övrigt är likformig med pyramidbasen. Denna övre figur skäres av kantlinjen ab uti punkterna m och n, som alltså tillhöra genomträngningslinjen. Ett annat vågrätt hjälpplan genom kantlinjerna $ce.c'$ och $df.d'$ giver en ny med basen likformig figur, vilkens skärningspunkter med nämnda kanter likaledes tillhöra den sökta skärningen. Slutligen erhållas understa punkterna medelst

ett vågrätt hjälpplan genom kanten *gh.g'*. Skärningslinjens vertikalprojektion sammanfaller med parallellepipedens bas *a'c'g'd'*.

Utbredningen av de båda kropparnas begränsningsplan jämte tillhörande skärningslinjer, vilket allt ej fått plats på planschen, överlämnas åt lärjungens eget studium.

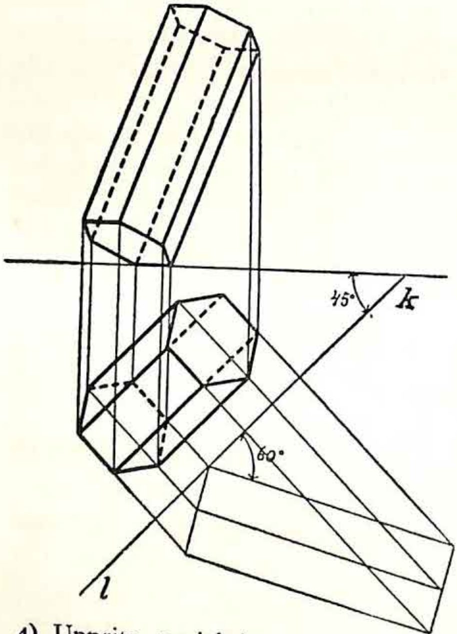
§ 10. Övningsuppgifter

1) En rät parallellepiped, 10 cm hög, 2 cm bred och 1 cm tjock, står lutad mot vertikalplanet i 30° vinkel. Upprita projektionerna i verklig storlek.

Lösning. Först ritas sidoprojektionen i likhet med *fig. 1 pl. VII.* Därur erhålles lätt övriga projektioner.

2) En rät, 10 cm lång prisma, vars bas är en reguljär sexhörning med 2 cm sida, står lutad mot vertikalplanet i 30° vinkel. Upprita projektionerna i skala 3 : 4.

Lösning. Först uppritas prisman stående på horisontalplanet. Med tillhjälp av de därigenom erhållna måtten konstrueras sidoprojektionen likasom i ex. 1. Därefter finnas övriga projektioner.



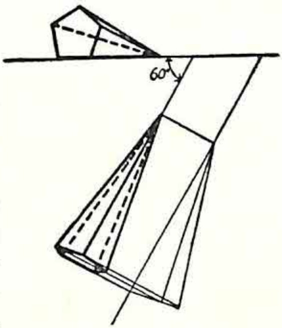
3) Upprita projektionerna av samma prisma, men ställd så, att kantlinjerna luta 60° mot horisontalplanet, och kantlinjernas horisontalprojektioner bilda 45° vinkel mot grundlinjen.

Lösning. Först uppritas prisman stående på horisontalplanet. Med tillhjälp av de därigenom funna måtten konstrueras sidoprojektionen i enlighet med *fig. 3 pl. VII.* Härvid lägges linjen *kl* så, att den bildar 45° vinkel med grundlinjen, och prismans kantlinjer ställas i 60° vinkel mot *kl.* De övrika projektionerna erhålles sedermera lätt.

4) Upprita projektionerna av en kub med 6 cm sida, som har en diagonal vinkelrät mot horisontalplanet och en annan diagonal parallell med vertikalplanet.

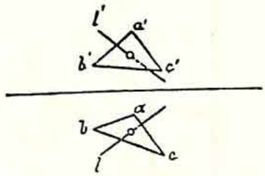
Lösning. Upprita först kuben stående på horisontalplanet, så att basens sidor bilda 45° vinkel med grundlinjen. Den därigenom erhållna vertikalprojektionen ställes i det önskade läget, med ena diagonalen vertikal, varefter horisontalprojektionen — som bliver en reguljär 6-hörning — uppritas.

5) En rät pyramid, 10 cm hög, vars bas är en reguljär 5-hörning med 2 cm sida, ligger med ena sidoplanet på horisontalplanet, så att höjdens horisontalprojektion bildar 60° vinkel med grundlinjen. Upprita projektionerna i skalan 4:5.



Lösning. Upprita först pyramiden stående på horisontalplanet och, med stöd av de därigenom funna måtten, en sidoprojektion i enlighet med *fig. 3 pl. VII.* Ur sidoprojektionen härledas sedermera de övriga projektionerna.

6) Projektionerna av en triangel *abc. a'b'c'* och en linje *l.l'* äro givna. Bestäm den punkt, i vilken linjen genomtränger triangeln.



Lösning. Lägg genom linjen ett lodrätt plan och sök dess skärning på triangeln. I denna skärning ligger genomträngningspunkten.

7) En rät 5-kantig pyramid av godtyckliga dimensioner, stående på horisontalplanet, samt en densamma genomträngande linje äro givna till sina projektioner. Bestäm de punkter, i vilka linjen skär pyramiden.

Lösning. Lägg genom linjen ett lodrätt hjälpplan och sök dettas skärning med pyramiden. I denna skärningslinje ligga genomträngningspunkterna.

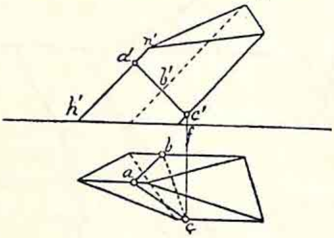
8) Upprita projektionerna av en cirkel, vars plan står lodrätt, men bildar 50° vinkel med vertikalplanet.

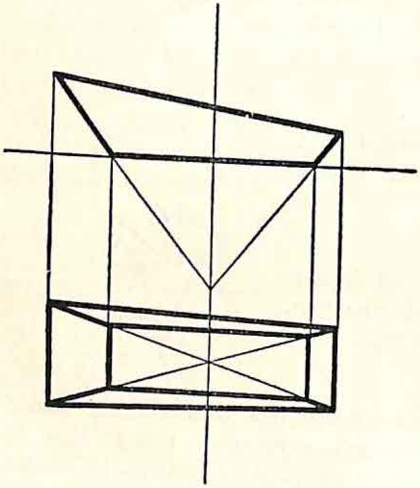
Lösning. Se textfigur 12. Samma metod, som använts för att finna den 5-kantiga prismabasens projektioner, tillämpas också här. Cirkelns periferi delas i ett visst antal, t. ex. 8 lika delar, och delpunkterna överföres till vertikalprojektionen.

9) En sned prisma, som upptill är snett avskuren, såsom nedanstående skiss visar, är given i en med vertikalplanet parallell ställning.

Skär densamma med ett mot kantlinjerna vinkelrätt plan och bestäm sedan med tillhjälp av denna vinkelräta avskärning sidoplanens utbredning.

Lösning. Skärningen bliver en triangel *abc.a'b'c'*, vars verkliga form kan finnas, exempelvis genom vridning kring linjen *cf.c'* till parallell ställning med horisontalplanet. Den sålunda funna triangelns sidor utsträckas i en rät linje $a_0b_0c_0d_0$, och från punkterna a_0b_0.... avsättas vinkelrätt uppåt och nedåt kantlinjernas längder *a'n'* och *a'h'*... o. s. v.





10) Ett plåtkärl, vars väggar bilda sidoplanen i en snett avskuren pyramid med rektangulär bas, är givet genom sina projektioner. Bestäm sidoplanens verkliga form och därigenom storleken av det plåtstycke, som är erforderligt för kärlets hopfogande.

Lösning. Tillämpa de i *fig. 2* och *fig. 3 pl. XI* visade metoderna.

Kap. IV. **Runda kroppar**

Kroppar, som helt och hållet eller delvis begränsas av buktiga ytor, kallas *runda*. De vanligaste runda kropparna äro *cylindern*, *konen* och *sfären*. Bland dessa betrakta vi först den allmännaste, nämligen:

§ 1. Cylindern

En kropp begränsad av två lika, parallella cirklar, cylinderns *baser*, samt en buktig yta, *den cylindriska ytan*.

Man kan tänka sig denna cylindriska yta alstrad genom en rät linje, som rör sig utefter baserna och därvid ständigt förbliver parallell med sig själv. Varje rät linje på cylinderytan kallas därför en *alstringslinje* eller *generatris*.

Anm. I Allmänhet betecknas såsom cylindrisk yta varje yta, som alstras av en obegränsad rät linje, då den rör sig utefter en kroklinje i ständigt parallell ställning. Varje rät linje på en sådan allmän cylinderyta kallas alstringslinje eller generatris och kroklinjen styrlinje eller direktris. Avskäres en allmän cylinderyta, vars styrlinje är en sluten linje, medelst två parallella plan, så erhålles en *cylinder i allmännare mening*.

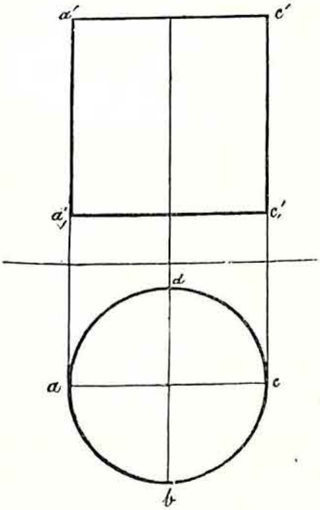


Fig. 17

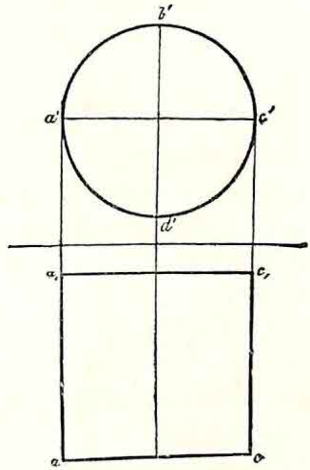


Fig. 18

Stå cylindergeneratriserna vinkelrätt mot baserna, kallas cylindern *rät*, i annat fall *sned*. Sammanbindningslinjen mellan basernas medelpunkter kallas cylinderns *axel*, det vinkelräta avståndet mellan dem cylinderns *höjd*. En rät cirkulär cylinder kallas även *rotationscylinder*.

I textfigur 17 äro framställda projektionerna av en rät cylinder, vars axel är vinkelrät mot horisontalplanet. Horisontalprojektionen är en cirkel *abcd*, vertikalprojektionen en rektangel $a'c'c'_1a'_1$. Rektangelns vågräta linjer äro projektionerna av cylinderbaserna, de lodräta linjerna utgöra vertikalprojektionerna av de två yttersta generatriserna, innanför vilka alla andra generatrisers vertikalprojektioner äro belägna.

Man kallar de linjer, som begränsa vertikalprojektionerna av cylinderytans generatriser, bildens *vertikalkontur*. Linjerna $a'a'_1$ och $c'c'_1$ i fig. 17 bilda vertikalkonturen.

Fig. 18 visar bilden av en rät cylinder, vars axel är vinkelrät mot vertikalplanet. Cirkeln $a'b'c'd'$ är vertikalprojektionen, rektangeln aa_1cc_1 horisontalprojektionen. Linjerna aa_1 och cc_1, som begränsa horisontalprojektionerna av cylinderytans generatriser, kallas bildens *horisontalkontur*.

§ 2. Cylinderns plana skärning. Cylinderytans utbredning. Pl. XIV

Skäres en cylinder av ett plan parallellt med basen, bliver skärningen en cirkel. Är planet parallellt med generatriserna, bliver skärningen en parallellogram. Står planet snett såväl mot basen som mot generatriserna, bliver skärningen en krokig linje, som kan bestämmas på sätt som följer.

Den i *fig. 1 pl. XIV* framställda cylindern antages skuren av ett plan, *vinkelrätt mot vertikalplanet*, men snett mot horisontalplanet. Skärningens vertikalprojektion måste då tydligen te sig såsom en rät linje $a'c'$, och dess horisontalprojektion såsom en cirkel *abcd*.

För att finna den *verkliga formen på avskärningslinjen* ihågkomma vi, att varje *med ett av projektionsplanen parallell* figur synes i sin verkliga form. Vi vrida alltså skärningen omkring den mot vertikalplanet vinkelräta linjen $bd.d'$ till parallell ställning med horisontalplanet. Den högsta punkten $a.a'$ intager efter vridningen läget $a_0.a'_0$, den lägsta punkten förflyttas till $c_0.c_0'$. En annan godtycklig punkt l' i vertikalprojektionen intager efter vridningen läget l'_0. Vertikalprojektionen l' motsvarar två olika punkter i horisontalprojektionen, nämligen l och l_1. Efter vridningen hava dessa punkter kommit till l_0 och l_{10}. Genom att på detta sätt behandla åtskilliga punkter på skärningen erhålles i horisontalprojektionen kroklinjen $a_0l_{10}bc_0dl_0$ såsom den *verkliga* formen av cylinderns och planets skärning. Denna kroklinje är en *ellips*.

Utbredning.

En cylindrisk yta, vilken som helst, kan tänkas bestå av oändligt många smala parallellogrammer; den kan därför utvecklas eller utbredas i ett plan. Utbredningen av den vanliga cylinderytan verkställes så som *fig. 2* visar. Dela bascirkeln *fig. 1* i ett antal lika stora delar, så små, att de kunna närmelsevis anses såsom räta linjer, och avsätt dessa delar på den förlängda grundlinjen.[1] Bestäm de till delpunkterna hörande generatrisernas längder i *fig. 1* och överför medelst vågräta linjer dessa längder till motsvarande punkter i *fig. 2*. Därpå sammanbindas alla ändpunkterna i *fig. 2* genom en jämn kroklinje. Fig. $oC_0A_0C_0\ 16$ utgör cylinderytans utbredning. Härtill äro, för fullständighets skull, fogade cylinderns bas och avskärning.

§ 3. Konen

En kropp, begränsad av en cirkel, konens *bas*, och en buktig till en punkt sammanlöpande yta. Punkten kallas konens *spets*. Man kan tänka sig den *koniska ytan* alstrad genom en rät linje, som rör sig utefter basen och därvid ständigt går genom spetsen. Varje på ytan dragen rät linje kallas därför en *generatris*.

Anm. I allmänhet betecknas med konisk yta varje yta, som alstras av en obegränsad rät linje, då den rör sig utefter en kroklinje och därvid ständigt går genom en fast punkt. Varje rät linje på en sådan yta kallas en generatris, kroklinjen styrlinje eller direktris. Den allmänna koniska ytan består av två delar eller dukar, en på var sida om den fasta punkten. Avskäres en allmän konisk yta, vars styrlinje är en sluten linje, medelst ett plan, så att en sluten rymdform mellan spetsen och planet uppstår, så kallas denna en *kon i allmännare mening.*

Äro alla generatriser på den cirkulära konens yta lika långa, kallas den *rät*, i annat fall *sned*. Sammanbindningslinjen mellan spetsen och basens medelpunkt kallas konens *axel*, det vinkelräta avståndet mellan spetsen och basen konens *höjd*. En rät cirkulär kon kallas även *rotationskon*.

[1] Härvid bör utbredningens längd kontrolleras genom den från geometrien kända satsen, att hela den utsträckta cirkelperiferien är lika med 3,14. . . *d*, om *d*= cirkelns diameter. Tillnärmelsevis kan man sätta denna längd$=3^1/_7\,d$.

I fig. 19 äro framställda projektionerna av en rät kon, vars axel är vinkelrät mot horisontalplanet. Horisontalprojektionen är en cirkel *abcd*, vertikalprojektionen en triangel *a's'c'*. Triangelns vågräta linje *a'c'* är basens projektion, de sneda linjerna *s'a'* och *s'c'* utgöra vertikalprojektionerna av de två linjer, som omsluta alla genera-

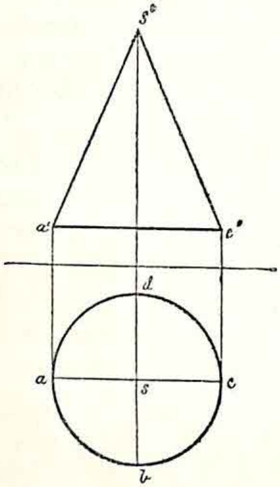


Fig. 19

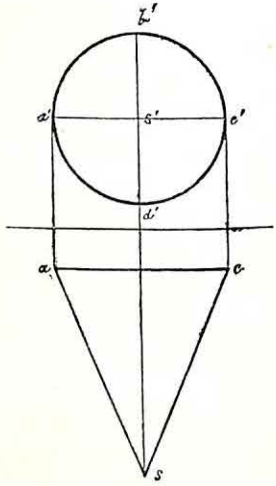


Fig. 20

trisernas vertikalprojektioner. Man kallar därför, liksom vid cylinderytan, dessa linjer *s'a'* och *s'c'* bildens *vertikalkontur*.

I fig. 20 framställes bilden av en rät kon, vars axel är vinkelrät mot vertikalplanet. Cirkeln *a'b'c'd'* är vertikalprojektionen, triangeln *sac* horisontalprojektionen. Linjerna *sa* och *sc*, som begränsa horisontalprojektionerna av den koniska ytans samtliga generatriser, utgöra *horisontalkonturen*.

§ 4. Konens plana skärningar. Pl. XV

Skäres konen av ett plan, som går genom dess spets, bliver skärningen två linjer; går det skärande planet *icke* genom spetsen, kunna olika kroklinjiga skärningar uppkomma allt efter planets ställning i förhållande till konen.

A. Det skärande planet icke parallellt med någon av den koniska ytans generatriser.

Den vertikala konen i *fig. 1* skäres av ett plan, lutande mot horisontalplanet, men vinkelrätt mot vertikalplanet. Till följd av denna ställning hos planet kommer skärningslinjens vertikalprojektion att te sig såsom en rät linje $e'f'$. För att finna horisontalprojektionen tänka vi oss såväl konen som planet skurna av *horisontala hjälpplan*. Ett sådant hjälpplan skär konen i en cirkel, som i vertikalprojektionen synes såsom en rät linje $g'h'$, men i horisontalprojektionen såsom cirkeln $gkhk_1$. Samma hjälpplan skär det lutande planet i en rät linje, vilken i vertikalprojektionen synes såsom en punkt k', emedan den står vinkelrätt mot vertikalplanet, men i horisontalprojektionen såsom den mot grundlinjen vinkelräta linjen uv. De punkter k och k_1, där denna linje skär cirkeln, tillhöra såväl konen som det sneda skärande planet och ligga således på den sökta skärningslinjen.

På samma sätt kunna huru många punkter som helst bestämmas. *Högsta* och *lägsta* punkten e' och f' hava i horisontalprojektionen endast *en* motsvarig punkt, nämligen e och f, eljest svara till varje punkt i vertikalprojektionen *två* punkter i horisontalprojektionen.

Denna funna kroklinje är en *ellips*.

Den sålunda framställda ellipsen lutar mot horisontalplanet och synes därför *kortare* än den i verkligheten är. Verkliga formen finnes enklast genom att vrida kroklinjen kring mittlinjen $e'f'$ till parallell ställning med vertikalplanet. För att emellertid göra teckningen redigare, förflytta vi den sålunda omvridna ellipsen från axeln $e'f'$, parallellt med sig själv, utanför konens vertikalprojektion. Drag således linjen e_0f_0 parallell med $e'f'$, samt från alla punkter e', k' . . . f' linjer vinkelräta däremot. Från den punkt v_0, där en sådan från k' dragen linje träffar den förflyttade axeln, avsättas åt båda sidor stycken v_0k_0 och $v_0k_{10} = vk$ och vk_1 i horisontalprojektionen. På liknande sätt erhållas övriga punkter av skärningslinjens verkliga form.

Anm. Är det skärande planet i *fig. 1 parallelt med konens bas*, övergår ellipsen till en *cirkel.*

B. Det skärande planet parallellt med **en** *av den koniska ytans generatriser.*

Den vertikala konen *fig. 2* skäres av ett plan, lutande mot horisontalplanet, men vinkelrätt mot vertikalplanet *och parallellt med generatrisen as.a's'.*

Skärningens vertikalprojektion är den räta linjen *e'f'*. För att finna horisontalprojektionen använda vi horisontala hjälpplan. Ett sådant hjälpplan skär konen i en cirkel, som i vertikalprojektion synes såsom den räta linjen *k'l'*, men i horisontalprojektion såsom cirkeln $knln_1$. Samma hjälpplan skär det lutande planet i en rät linje, vilken i vertikalprojektionen synes såsom punkten *n'*, men i horisontalprojektionen såsom den mot grundlinjen vinkelräta linjen *uv*. De punkter *n* och n_1, där denna linje skär cirkeln, äro gemensamma för konen och det skärande planet och tillhöra således den sökta skärningslinjen. På liknande sätt bestämmas flera punkter. Högsta punkten *e'* har endast *en* motsvarig punkt *e* i horisontalprojektion, eljest svara till varje punkt i vertikalprojektionen *två* punkter i horisontalprojektionen.

Kroklinjen är en *parabel.*

Den framställda parabeln lutar mot horisontalplanet och synes därför kortare, än den i verkligheten är. För att finna verkliga formen kunna vi använda samma förfaringssätt som i *fig. 1*. Men vi välja för övnings skull ett annat, som stödjer sig på *fig. 3* i föregående *pl. XI.* Vrid alltså parabeln kring den mot vertikalplanet vinkelräta axeln $ff_1.f'$, tills figuren infaller i horisontalplanet och sålunda synes i sin verkliga form. Vid vridningen beskriver högsta punkten *e.e'* en cirkelbåge, som i vertikalprojektionen synes i sin verkliga form, men i horisontalprojektionen såsom en rät linje. Efter vridningen ligger punkten i e_0. På liknande sätt bestämmas alla övriga punkter.

C. Det skärande planet parallellt med **två** *av den koniska ytans generatriser.*

Den vertikala konen *fig. 3* skäres av ett plan, som an-

tages vara parallellt med vertikalplanet och således även parallellt med de två generatriserna *sa.s'a'* och *sb.s'b'*. Emedan skärningsplanet är lodrätt, så är skärningens horisontalprojektion den räta linjen *ef*. För att finna vertikalprojektionen använda vi horisontala hjälpplan. Ett sådant hjälpplan skär konen i en cirkel och det givna planet i en vågrät linje, vars med cirkeln gemensamma punkter tillhöra den sökta kroklinjen. Skärningens *högsta* punkt bestämmes av en cirkel *knmp.k'm'*, som *tangerar* linjen *ef*.

Då det skärande planet denna gång är parallellt med ett av projektionsplanen, så synes skärningslinjen i motsvarande projektion, nämligen vertikalprojektionen, i sin *verkliga form och storlek*.

Kroklinjen är en gren av en *hyperbel*.

De tre nu omnämnda kroklinjerna ellips, parabel och hyperbel äro redan bekanta från Kap. II § 5. Vi hava här endast funnit ett nytt framställningssätt av dessa viktiga linjer, nämligen såsom skärningar, *sektioner*, mellan en kon och ett plan.[1]

Anm. För att i allmänhet kunna avgöra av vad slag den på en rät eller sned cirkulär kon alstrade plana skärningen är, behöver man endast tänka sig ett plan parallellt med det skärande, *men gående genom konens spets*. Om konen *ej* skäres av detta plan, alstrar det därmed parallella planet en *ellips*. Har konen endast *en* generatris gemensamt med planet, alstrar skärningsplanet en *parabel*; men skäres konens yta i *två* generatriser, så alstrar det givna planet en *hyperbel*.

§ 5. Utbredning av en konisk yta. Pl. XVI

Varje konisk yta kan tänkas bestå av oändligt många, oändligt smala, intill varandra liggande trianglar och låter därför, i likhet med den cylindriska, utbreda sig i ett plan. *Pl. XVI* visar, huru denna utbredning verkställes, dels med en rät, dels med en sned kon.

I *fig. 1* framställes en kon med en på dess yta befintlig ellips, som ligger i ett mot vertikalplanet vinkelrätt

[1] Det stränga geometriska beviset för att verkligen dessa »koniska sektioner» äro identiska med de i kap. II § 5 behandlade kroklinjerna har här för korthetens skull utelämnats. Se häröver exempelvis: Lindelöf. Lärobok i Analytisk Geometri.

plan. Ellipsen synes därför på figuren såsom en rät linje. För att utbreda ytan jämte kroklinjen är icke nödigt att upprita ellipsens horisontalprojektion.

Drag med en godtycklig punkt s_0 till medelpunkt och längden $s'a'$ till radie en cirkelbåge *fig. 2*, lika lång som periferien av konens bascirkel. För erhållandet av denna längd delas bascirkeln i ett antal små, lika delar, vilka avsättas på cirkelbågen *fig. 2*. I *fig. 1* är basen delad i 16 delar, och 8 sådana delar äro avsatta på cirkelbågen i *fig. 2*, åt var sida om den vågräta linjen s_0a_0. Ellipsen antager i utbredningen en form, som erhålles genom att från s_0 avsätta *verkliga* längden av de stycken, som ellipslinjen avskär på konens generatriser. Längderna $s'r'$ och $s'p'$ äro parallella med vertikalplanet, synas därför i sin verkliga storlek och avsättas omedelbart i *fig. 2* från s_0 till r_0 och p_0. För att däremot erhålla den *verkliga* längden av ett annat stycke, t. ex. $s'q'$, måste vi vrida generatrisen omkring konens axel till parallell ställning med vertikalplanet. Då flyttar sig generatrisen $s'y'$ till läget $s'b'$ och punkten q' i vågrät riktning till q''. Således bliver $s'q''$ den verkliga storleken av den avskurna generatrisen. Detta mått avsättes i utbredningen från s_0 till q_0. På samma sätt förfares med övriga punkter.

I *fig. 3* och *4* visas utbredningen av en *sned* kon. Basens omkrets indelas liksom ovan i små, lika stora delar, och delpunkterna sammanbindas med spetsen s. Härigenom uppstå smala triangelelement, vilka utbredas på planet, sedan man först bestämt triangelsidornas verkliga storlek. Detta kan göras på alldeles samma sätt som på *fig. 2 pl. XI*, i det man vrider varje generatris till parallell ställning med vertikalplanet. Om således generatrisen so vrides till parallell ställning med vertikalplanet, synes den i horisontalprojektionen såsom so_0 och i vertikalprojektionen till sin verkliga storlek såsom $s'o'_0$. Likaså är $s'1'_0$ den verkliga längden av generatrisen $s1$ . . . o. s. v.

Nu väljes en godtycklig punkt S_0 i planet *fig. 4*, och från denna drages en linje, vars längd S_0o är$=s'o'_0$. Med denna linjes ena ändpunkt S_0 till medelpunkt samt den ur *fig. 3* tagna verkliga längden $s'1'_0$ till radie slås en cir-

kelbåge och med den andra ändpunkten *o* till medelpunkt samt båglängden o—1 till radie slås en annan cirkelbåge. Dessa bågars skärningspunkt 1 tillhör utbredningen. Invid den sålunda konstruerade triangeln anbringas den nästa, vars sidor bestämmas på samma sätt o. s. v., tills hela utbredningen är färdig. De avskurna punkterna *1*, *2* . . . förenas med en jämnlöpande kroklinje.

§ 6. Sfären och dess plana skärningar. Pl. XVII

Om en kroklinje, vilken som helst, vrider sig, *roterar*, kring en rät linje såsom axel, så att alla dess punkter beskriva cirklar med medelpunkterna på den räta linjen, så alstras en buktig yta, kallad *rotationsyta*. Den rörliga linjen är dess *alstringslinje* eller *generatris*, den fasta linjen dess *axel*. Varje plan, som går genom rotationsytans axel, kallas ett *meridianplan*, och dess skärning på ytan en *meridian*. De skärningar, som uppstå av mot axeln vinkelräta plan, kallas *parallellcirklar*.

Den viktigaste och allmännaste av de runda kroppar, som begränsas av rotationsytor, är *sfären* eller *klotet*, vilkens yta, den *sfätiska ytan*, alstras av en cirkel, som vrider sig kring en diameter. Roterar cirkeln kring en linje, som ligger i dess plan men *utanför* densamma, så uppstår en *ring* eller torus.

Pl. XVII behandlar några uppgifter rörande sfären.

Cirkeln *acbd*, *fig. 1*, som innesluter samtliga generatrisers horisontalprojektioner, är bildens *horisontalkontur*, cirkeln $a'm'b'm'_1$, vilken begränsar samtliga generatrisers vertikalprojektioner, är dess *vertikalkontur*.

På grund av sfärens symmetriska form kan vilken genom medelpunkten gående linje som helst uppfattas såsom dess axel. Vi välja härtill, för enkelhets skull, den lodräta linjen genom medelpunkten.

Skärning mellan sfären och ett meridianplan. Fig. 1.

Vi antaga, att skärningens horisontalprojektion är linjen *em* (i det vi endast betrakta sfärens ena hälft) och skola

söka tillhörande vertikalprojektion. Härvid användas mot rotationsaxeln vinkelräta hjälpplan. Ett dylikt hjälpplan skär sfären i en cirkel *ghik.g'i'* och meridianplanet i en vågrät linje, som träffar cirkeln i punkten *r.r'*. Cirkeln *ghik* motsvarar även ett annat hjälpplan, medelst vilket punkten r'_1 erhålles. Den yttersta punkten *e'* motsvaras av *e* på horisontalkonturen. På samma sätt kunna vertikalprojektionerna av godtyckligt många meridianer uppritas, så snart horisontalprojektionerna äro givna.

Skärning mellan sfären och ett plan, som ej går genom axeln. Fig. 1.

Antag att det skärande planet är lodrätt, och att skärningens horisontalprojektion är linjen *uv*. Vertikalprojektionen bestämmes då, alldeles som vid meridianerna, medelst vågräta hjälpplan, som skära sfären i cirklar och det givna planet i vågräta linjer. Skärningens högsta och lägsta punkter *p.p'* och $p.p'_1$ erhållas genom en tangerande cirkel, vilken i vertikalprojektionen svarar mot två vågräta linjer. Gränsen mellan skärningens synliga och osynliga delar bestämmes av konturpunkterna *t'* och t'_1, vilka motsvara punkten *t* på mittlinjen *ab* i horisontalprojektionen.

Sfärens *samtliga plana skärningar äro cirklar*, vilka vid sned ställning mot ett projektionsplan projiciera sig såsom *ellipser*.

§ 7. Närmelsevis utbredning av den sfäriska ytan. Pl. XVII

Rotationsytor kunna *icke*, såsom cylindriska och koniska ytor, fullständigt utbredas i ett sammanhängande helt på ett plan. Men en närmelsevis utbredning kan erhållas därigenom, att ytan delas i smärre delar, vilka uppfattas såsom tillhörande koniska eller cylindriska ytor. En sådan utbredning är utförd för den sfäriska ytan på *pl. XVII*.

Härvid kunna således två olika förfaringssätt användas, nämligen:

1) Rotationsytan delas medelst parallellcirklar i stycken, vilka uppfattas såsom *koniska* ringar.

2) Rotationsytan delas medelst meridianer i stycken, vilka uppfattas såsom *cylindriska delar*.

Den *första metoden* är tillämpad i *fig. 3*. Vertikalkonturen av sfären, *fig. 2*, delas i t. ex. 16 lika delar, och vågräta linjer dragas, föreställande parallellcirklarnas vertikalprojektioner. Dessa cirklars horisontalprojektioner delas i små, lika, t. ex. 16 delar. Punkterna b' och $1'$ på vertikalkonturen sammanbindas, och sammanbindningslinjen utdrages, tills den skär rotationsytans axel i s'. Likaså sammanbindas $1'$ och $2'$ samt $2'$ och $3'$, varigenom punkterna s'' och s''' erhållas.

Tag en godtycklig punkt s'_0, *fig. 3*, till medelpunkt och slå en cirkelbåge med $s'b'$ till radie samt avsätt på denna båge, åt båda sidor, från en punkt b_0 åtta stycken delar $b_0x_0 = bx$ i *fig. 2*. Därigenom bestämmas punkterna a_0, a_0 uti *fig. 3*. Avsätt vidare på $b_0s'_0$ en längd $b_0 1_0 = b'1'$. Slå en cirkelbåge genom 1_0 och avskär densamma medelst radierna s'_0a_0. Då är den första koniska ringen utbredd.

Gör $1_0s_0'' = 1's''$, slå med s''_0 till medelpunkt en cirkelbåge, på vilken åt båda sidor avsättes måttet lz åtta gånger, gör $1_02_0 = 1'2'$ samt fortsätt som ovan. Förfar på liknande sätt med övriga ringar, så erhålles tillnärmelsevis en utbredning av hela den sfäriska ytan. Vid utbredning av den sista lilla kalotten $3'4'5'$ tages $3'4'$ till radie. I figuren är till besparing av utrymmet endast halva sfäriska ytan uppdelad i ringar.

Andra metoden. Sfärens yta är medelst 8 vertikala plan indelad i meridianer, vilkas vertikalprojektioner ej behöva uppritas. Avsätt från en godtycklig punkt *B* *fig. 4*, på en rät linje uppåt och nedåt, stycken *B I*, *I II*, *II III*, *III IV* = delarna $b'1'$, $1'2'$, $2'3'$, $3'4'$; sätt i *B* en bredd $b_0x_0 = bx$, i *I* bredden $l_0z_0 = lz$ samt i II bredden $u_0v_0 = uv$, och förfar på liknande sätt med hela den mellan två meridianer liggande delen. Genom att upprepa konstruktionen erhålles tillnärmelsevis en utbredning av rotationsytan. I figuren är endast *halva* sfärens yta uppdelad.

§ 8. Skruvlinjen och skruvformiga ytor. Pl. XVIII

Om en punkt likformigt rör sig på en cylinderyta runt kring axeln och samtidigt har en likformig rörelse i cylinderns längdriktning, beskriver den en bana, som kallas en *cylindrisk skruvlinje*, *fig. 1*. Avståndet från en punkt *a'* på skruvlinjen till nästa punkt *t'* på *samma* generatris kallas skruvlinjens *stigning*. Stigningen utvisar alltså, huru långt den rörliga punkten förflyttat sig i generatrisens riktning, då den beskrivit ett helt varv på cylinderns yta. Cylinderns axel kallas även *skruvlinjens axel*. En cylindrisk skruvlinje kan också tänkas uppkomma därigenom, att en rätvinklig triangel, vars ena katet är = cylinderns omkrets och vars andra katet = stigningen, vecklas omkring cylindern. Triangelns hypotenusa bildar då skruvlinjen.

Äro cylinderdiametern och stigningen kända, kan skruvlinjen på följande sätt konstrueras. På cylinderytan, *fig. 1*, är stigningen avsatt från *a'* till *t'* i vertikalprojektionen. Dela detta mått i ett godtyckligt antal, t. ex. 12 lika delar, samt cylinderns bascirkel i lika många delar. Skärningspunkterna mellan de vågräta linjerna genom stigningens delpunkter och de lodräta linjer, som uppdragas från periferiens motsvarande delpunkter, tillhöra skruvlinjen. Gränserna mellan kroklinjens synliga och osynliga delar bestämmas av cylinderns vertikalkontur.

Av ovanstående följer att:

Om cylinderytan med den därpå uppritade skruvlinjen utbredes, framträder den senare såsom en ***rät linje****. Skruvlinjen är därför den kortaste vägen mellan två punkter på cylinderytan.*

Utom den nu beskrivna cylindriska skruvlinjen har man även andra skruvlinjer, såsom *koniska* och *sfäriska*, vilkas konstruktion dock, såsom av mindre praktisk betydelse, här må utelämnas.

Om en rät linje glider samtidigt utefter en skruvlinje och dennas axel samt därvid ständigt bildar samma vinkel med den senare, alstras en *skruvyta*. Denna skruvyta liknar de förut omtalade cylindriska och koniska ytorna så tillvida, att den alstras av en *rät* linje, men den skiljer sig

från dessa däruti, att två närbelägna generatriser varken äro parallella, såsom i den cylindriska, eller skära varandra, såsom i den koniska ytan. En dylik buktig yta, vars rätlinjiga generatriser, änskönt de ligga varandra ytterst nära, likväl varken skära varandra eller äro parallella, kallas en *skev yta och kan icke fullständigt utbredas i ett plan.*

De skruvformiga ytorna hava, liksom de cylindriska, koniska och rotationsytorna, stor användning i det praktiska livet, exempelvis vid vanliga skruvar. Man kallar *plattgängad skruv* en sådan, som uppstår genom en *rektangels*, vanligen en *kvadrats*, skruvformiga rörelse längs en cylinderyta, *skarpgängad skruv* en sådan, som uppstår genom en *triangels* skruvformiga rörelse längs cylinderytan.

I *fig. 2* visas projektionerna av en plattgängad skruv. Givet är: en lodrät cylinder samt en lodrät kvadrat *ab.* *a'b'c'd'*, vars ena sida ligger i cylinderytan, och vars plan går genom cylinderns axel. Vid uppritandet av de skruvlinjer, hörnpunkterna av kvadraten beskriva, hava vi antagit *stigningen=dubbla kvadratsidan.* För att finna skruvlinjen för punkten *a.a'* delas stigningen *a'g'* i ett antal, t. ex. 12 lika stora delar samt cirkellinjen uti horisontalprojektionen i ett lika stort antal, varefter skruvlinjen konstrueras såsom i *fig. 1.* Skruvlinjerna för de övriga punkterna *b'*, *d'* och *c'* framställas på liknande sätt. Genom att fortsätta indelningen uppåt erhålles en godtycklig längd av skruven. De vågräta kvadratsidorna *a'b'* och *c'd'* alstra skeva skruvytor, den lodräta sidan *a'c'* en cylinderyta.

Fig. 3 visar projektionerna av en skarpgängad skruv. Givet är: en lodrät cylinder samt en liksidig triangel *ab.a'b'c'*, vars ena sida ligger i cylinderytan, och vars plan går genom cylinderns axel. Vi hava här tagit *stigningen=triangelsidan b'c'*. Avståndet *b'c'* delas sålunda i t. ex. 12 lika delar och basens horisontalprojektion i lika många delar, varefter skruvlinjen för punkten *b'* konstrueras. Genom fortsatt indelning uppåt erhålles skruvlinjen för punkten *c.* Triangelspetsen *a* beskriver en skruvlinje, vars horisontalprojektion är cirkeln genom *a* och vars stigning *a'f'* är lika med stigningen för skruv-

linjerna genom b' och c'. Längden $a'f'=b'c'$ delas därför ävenledes i 12 delar, varefter förfares såsom ovan. De båda triangelsidorna alstra skeva skruvytor, vilkas vertikalkonturer med tillräcklig noggrannhet framställas genom tangenter till skruvlinjerna.

Kap. V. **Runda kroppars skärning med varandra**

Pl. XIX

§ 1. Allmän regel

Såsom ett tillägg och en ytterligare övning till läran om runda kroppars plana skärningar vilja vi behandla några exempel om runda kroppars skärning *med varandra;* ty vi finna i allmänhet dessa skärningslinjer genom att skära de båda kropparna med hjälpplan och söka de punkter, vilka äro gemensamma för två och två av dessa plana skärningar. Sammanbindningslinjen mellan de gemensamma punkterna utgör den sökta skärningen. Följande enkla uppgifter skola visa tillämpningen av denna allmänna regel.

§ 2. Övningsexempel

Fig. 1. Skärning mellan en lodrät och en densamma genomträngande vågrät cylinder.

Sedan båda cylindrarnas horisontalprojektioner och den lodrätas vertikalprojektion blivit uppritade, bestämmas vertikalprojektionerna av den vågräta cylinderns baser. Dessa framstå som ellipser $a'e'b'f'$ och $c'g'd'h'$, med lillaxlarna $a'b'$ och $c'd'$ samt storaxlarna $e'f'$ och $g'h'$, vilka senare äro = diametern ab i horisontalprojektionen. För att direkt finna punkter på ellipserna, kunna vi nedlägga halvcirkeln ae_0b kring dess vågräta diameter till parallell

ställning med horisontalplanet, samt från godtyckligt valda punkter *m*, *s* . . . o. s. v. på diametern draga vinkelräta linjer. Styckena mm_0, ss_0. . . o. s. v. avsättas i vertikalprojektionen från *p*′ till *m*′ och m'_1, från q′ till *s*′ och s'_1 . . . o. s. v., varigenom ellipserna bestämmas.

Skärningslinjens horisontalprojektion sammanfaller med den lodräta cylinderns, dess vertikalprojektion finnes medelst *användning av vertikala hjälpplan*, parallella med båda cylinderytornas generatriser. Ett sådant plan skär den lodräta cylinderytan i två generatriser $r.r'r'_1$ och $v.v'v'_1$. Samma plan skär den vågräta cylinderytan likaledes i två generatriser, vilkas horisontalprojektioner sammanfalla till *en*, nämligen *st*, och vilkas vertikalprojektioner finnas, om stycket ss_0 avsättes uppåt och nedåt från cylinderns axel i vertikalprojektionen. Skärningspunkterna *x*′, x'_1, *y*′ y'_1, mellan de fyra generatriserna, tillhöra den sökta skärningslinjens vertikalprojektion. På samma sätt finnas ytterligare punkter.

Fig. 2. Skärning mellan två lodräta koner.

Sedan konernas projektioner blivit uppritade, bestämmes skärningen medelst *horisontala hjälpplan*. Dessa plan skära konerna i två cirklar, vilkas gemensamma punkter tillhöra den sökta skärningslinjen. Två sådana gemensamma punkter äro t. ex. *f* och *g* i horisontalprojektionen, vilka uppförda till vertikalprojektionen giva ′ och *g*′.

Skärningslinjens *högsta* punkt bestämmes av ett genom konernas spetsar gående lodrätt hjälpplan. De av ett sådant plan avskurna generatriserna råka varandra i *c.c*′, som är den sökta punkten. Gränsen *h.h*′ mellan skärningens synliga och osynliga del måste ligga på den främre konens vertikalkontur. Då denna kontur motsvaras av linjen *mn* i horisontalprojektionen, så är skärningspunkten mellan linjen *mn* och kroklinjen *fcg* konturpunktens horisontalprojektion.

Fig. 3. Skärningen mellan en sfär och en lodrät cylinder.

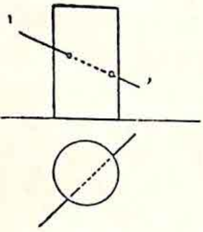
Man kan här använda antingen *vågräta eller lodräta hjälpplan*. I *fig. 3* är konstruktionen utförd medelst lod-

räta, med vertikalplanet parallella hjälpplan. Ett sådant plan skär sfären i en cirkel $pq.p'c'q'$ och cylinderytan i två generatriser $x.x'x'_1$ och $y.y'y'_1$, vilkas med cirkeln gemensamma punkter tillhöra skärningslinjen.

De högsta och lägsta punkterna t' och n' måste ligga i ett plan, som går genom de båda kropparnas lodräta axlar. Detta plans skärning på ytorna ter sig uti horisontalprojektion såsom den räta linjen *Mtmn*. Läggas därför lodräta hjälpplan genom t och n, så erhållas skärningens högsta och lägsta punkter.

Konturpunkterna, som utgöra gränserna mellan skärningslinjernas synliga och osynliga delar, finnas medelst ett hjälpplan genom cylinderns axel m.

§ 3. Övningsuppgifter

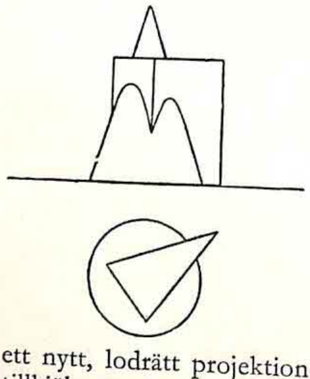


1) En lodrät cylinder och en linje äro givna genom sina projektioner, bestäm skärningpunkterna mellan linjen och cylinderytan.

Lösning. Lägg genom linjen ett lodrätt hjälpplan. Detta skär cylinderytan i 2 generatriser, på vilka de sökta genomträngningspunkterna måste ligga.

2) En lodrät kon och en densamma genomträngande linje äro givna genom sina projektioner, bestäm skärningspunkterna.

Lösning. Om genom linjen lägges ett lodrätt hjälpplan, skär detta plan konen i en hyperbel, som kan medelst vågräta hjälpplan uppritas, på samma sätt som figurerna i *pl. XV*.



3) Bestäm skärningen mellan en lodrät kon och en lodrät trekantig prisma.

Lösning. Använd vågräta hjälpplan, som skära konen i cirklar och prismans sidoplan i vågräta linjer.

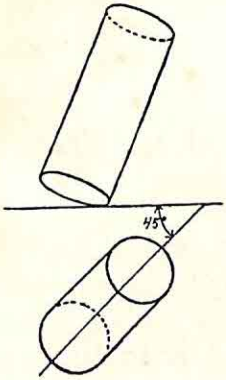
4) Upprita i skalan 1:1 projektionerna av en cylinder, vars höjd är = 10 cm och vars bas har en radie = 2 cm. Cylindern lutar i 60° vinkel mot horisontalplanet, och dess axels horisontalprojektion bildar 45° vinkel med grundlinjen. (Se nästa sida.)

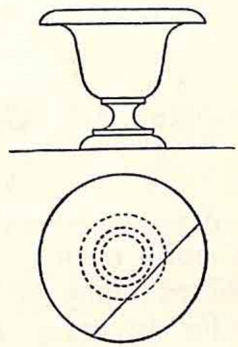
Lösning. Avbilda först cylindern på ett nytt, lodrätt projektionsplan parallellt med cylinderns axel. Med tillhjälp av denna sidoprojektion erhållas de övriga projektionerna. Se för övrigt exempel 3, sid. 46.

5) Upprita projektionerna av en vas med lodrät axel. Skär vasens yta med ett lodrätt plan och bestäm skärningens vertikalprojektion.

Lösning. Använd vågräta hjälpplan såsom i *fig. 1, pl. XVII.*

6) Upprita projektionerna av samma vas, liggande på horisontalplanet, med axelns horisontalprojektion i 60° vinkel mot grundlinjen.



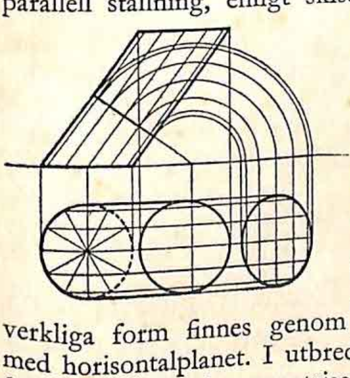


Lösning. Upprita först en sidoprojektion nedlagd på horisontalplanet, såsom i *fig. 3, pl. VII.* Härled sedermera härur vasens horisontal- och vertikalprojektion.

7) En lodrät kon och två punkter $p.p'$ och $q.q'$ på dess yta äro givna. Upprita projektionerna av den *kortaste* linje, som kan dragas på konens yta mellan dessa punkter.

Lösning. Om ytan först utbredes, så måste den sökta linjen i utbredningen vara en rät linje. Man går sedan lätt från utbredningen tillbaka till projektionerna.

8) En sned cirkulär cylinder är given uti en med vertikalplanet parallell ställning, enligt skissen. Skär densamma medelst ett mot längdaxeln vinkelrätt plan och bestäm, med tillhjälp av denna vinkelräta avskärning, cylinderytans utbredning.



Lösning. Skärningen bliver en ellips, vars horisontalprojektion uppritas genom att dela basen i ett antal t. ex. 12 delar och genom delpunkterna draga generatriser, vilkas skärningspunkter från vertikalprojektionen nedföras till horisontalprojektionen. Skärningens verkliga form finnes genom dess vridning till parallell ställning med horisontalplanet. I utbredningen bliver skärningen en rät linje, från vilken de på generatriserna avskurna styckena avsättas uppåt och nedåt. (Se för övrigt problem 9, sid. 47—48.)

9) Bestäm skärningen mellan en lodrät kon och en vågrät cylinder.

Lösning. Använd vågräta hjälpplan. Dessa skära konen i cirklar

och cylindern i generatriser, vilkas med cirklarna gemensamma punkter tillhöra den sökta skärningslinjen.

10) Bestäm skärningen mellan två sfärer.

Lösning. Skärningen bliver en cirkel, vars projektioner finnas medelst vågräta eller lodräta hjälpplan eller än lättare direkt medelst en sidoprojektion.

Kap. VI. Geometrisk skugglära

§ 1. Inledning

Vid det geometriska avbildandet av verkliga föremål vinnes större tydlighet och åskådlighet genom att förse bilderna med skuggor. Man tänker sig därvid föremålet utsatt för belysning av parallella ljusstrålar, *parallellbelysning*. Gränsen mellan den belysta och den mörka delen kallas *skugglinje*, den skugga, som föremålet kastar på ett plan eller på en buktig yta, kallas *slagskugga* och dess begränsning *slagskugglinje*.

Skuggorna utmärkas på geometriska ritningar genom *lavering* med en mörk färgton eller genom *streckning* eller genom användandet av *grövre begränsningslinjer* för den mörka delen.

Bestämmandet av skugglinjer och slagskugglinjer är den geometriska skugglärans närmaste uppgift.

§ 2. De parallella ljusstrålarnas riktning

Man brukar vanligen för erhållandet av möjligast enkla skuggkonstruktioner antaga, att ljusstrålarna hava samma riktning som ena diagonalen i en kub, vilken har två med horisontalplanet och två med vertikalplanet parallella sidoplan.

Om vi således i fig. 21 låta K föreställa kuben, H och V de två projektionsplanen samt W ett mot dem båda vinkelrätt projektionsplan, så utmärker diagonalen AD de parallella ljusstrålarnas riktning. Projicieras kuben med diagonalen på de tre projektionsplanen, så erhållas tre kvadrater med diagonalerna ad, $a'\,d'$ och $a''d''$, vilka senare

angiva ljusstrålarnas horisontal-, vertikal- och sidoprojektion. Samtliga dessa projektioner bilda 45° vinkel mot grundlinjen och man säger därför kort:

Ljusstrålarnas projektioner på horisontal-, vertikal- och det mot båda vinkelräta planet äro 45° linjer.

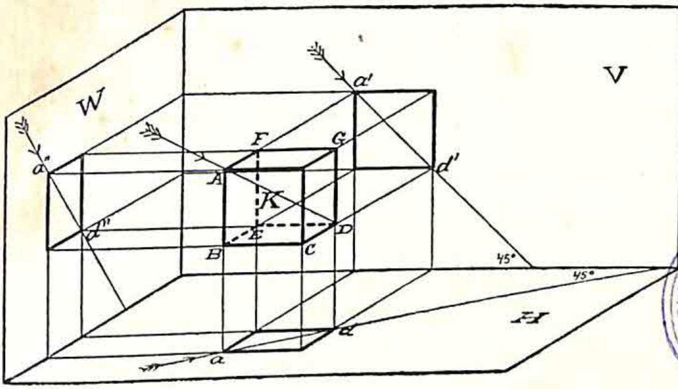


Fig. 21

Om vi således genom en, medelst sina projektioner $p.p'$, textfig. 22, given punkt skola föra en ljusstråle, så sker detta genom att draga 45° linjerna l och l'. Dessa linjer äro ljusstrålens projektioner. Bestämma vi, enligt kända regler, punktens sidoprojektion p'', så är l'' ljusstrålens sidoprojektion.

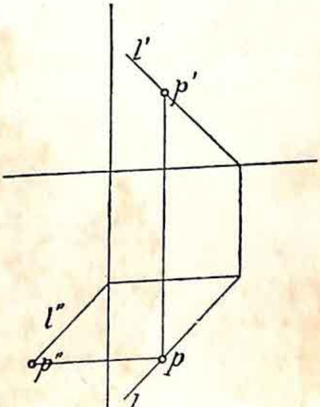


Fig. 22

§ 3. Slagskuggan av en punkt och en linje å projektionsplanen

Slagskuggan av en punkt på ett projektionsplan är skärningen mellan detta plan och en ljusstråle genom punkten. Låta vi alltså fig. 23 föreställa de båda projektionsplanen samt en punkt P i rymden och lägga vi en ljusstråle genom P, så är skärningspunkten s slagskuggan av punkten P på horisontalplanet.

Nu kunna vi emellertid förlänga ljusstrålen, så att den även skär vertikalplanet; då erhålla vi en punkt *q'*. Denna punkt q' betyder *punktens slagskugga på vertikalplanet, i fall horisontalplanet tänkes borttaget.* Vi kunna kalla *s* den *verkliga* och *q'* den *tänkta* slagskuggan av punkten *P*. De i fig. 23 utförda konstruktionerna komma att i vanlig projektionsritning te sig på sätt fig. 24 visar. Här är *p.p'* den givna punkten, *s* den verkliga slagskuggan på hori-

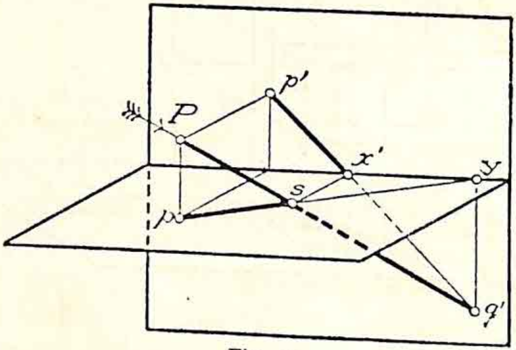


Fig. 23

sontalplanet och *q'* den tänkta slagskuggan på vertikalplanet. Att denna senare faller *under* horisontalplanet uttryckes på projektionsritningen genom att *q'* kommer *under* grundlinjen.

Ligger punkten i rymden närmare vertikalplanet än horisontalplanet i enlighet med fig. 25, så faller den verkliga skuggan på vertikalplanet och den tänkta på horisontalplanet. Konstruktionen utföres på projektionsritningen såsom fig. 26 visar, *p.p'* är den givna punkten, *s'* den verkliga slagskuggan på vertikalplanet och *q* den tänkta slagskuggan på horisontalplanet. Att denna senare faller *bakom* vertikalplanet uttryckes genom att *q* kommer *över* grundlinjen.

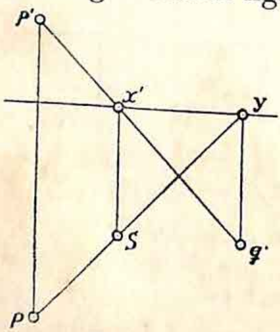


Fig. 24

Vi kunna nu med stöd av ovanstående figurer uppställa följande huvudregel:

I) *En punkts slagskugga på ett*

av projektionsplanen ligger på motsvarande projektion av ljusstrålen genom punkten och dessutom på en lodlinje, som drages från skärningspunkten mellan grundlinjen och ljusstrålens andra projektion.

Vigare gäller *vid den här antagna ljusriktningen:*

II) *När en punkts vertikalprojektion ligger närmare grundlinjen än dess horisontalprojektion, så faller punktens verkliga*

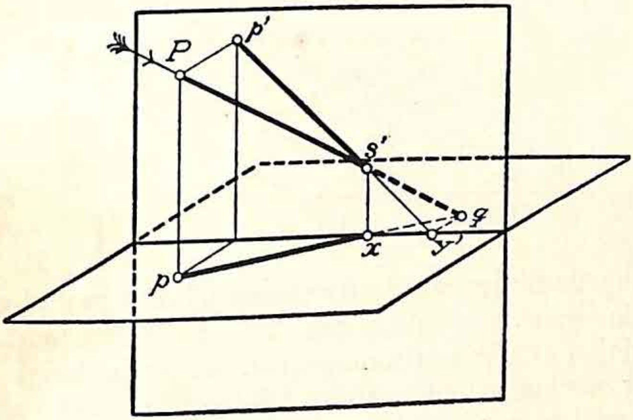


Fig. 25

slagskugga på horisontalplanet, men ligger horisontalprojektionen närmare grundlinjen, så faller den verkliga slagskuggan på vertikalplanet.

Slagskuggan av en rät linje bestämmes av ljusstrålar genom dess punkter. Alla dessa strålar bilda ett *ljusplan,* vadan *linjens slagskugga utgör skärningen av ett ljusplan genom linjen.* Slagskuggan av linjen *AB* på planet *Pl* fig. 27, kunna vi därför bestämma genom att söka slagskuggan av *A* och *B* på linjen. Sammanbindas de två skuggpunkterna, så erhålles den sökta skuggan, vilken tydligen alltid *är riktad till den punkt Z på planet Pl där linjen råkar detsamma.*

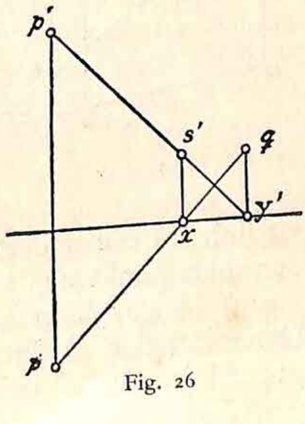


Fig. 26

Vid bestämmandet av en rät linjes verkliga slagskugga på

projektionsplanen kunna tre olika fall inträffa, nämligen:

1:o) *Skuggan faller helt och hållet på horisontalplanet*, fig. 28. Detta inträffar, såsom inses av regel II sid. 69, då ändpunkternas vertikalprojektioner *a'* och *b'* ligga när-

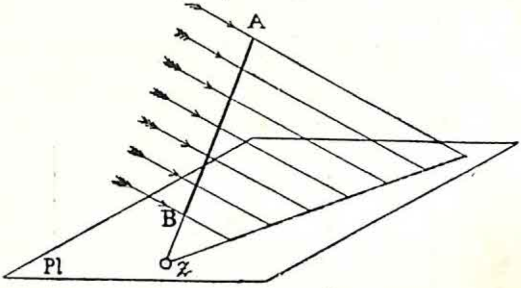


Fig. 27

mare grundlinjen än horisontalprojektionerna *a* och *b*. Slagskuggan *rv.r'v'* måste vara riktad till den punkt *z.z'*, där linjen träffar horisontalplanet. Vi finna denna punkt enligt samma grunder, som gälla för en ljusstråles skärning med planet, och vilka tillämpats i fig. 24 och regel I. Förlänges alltså vertikalprojektionen *a'b'* till grundlinjen och drages från punkten *z'* en mot grundlinjen vinkel-

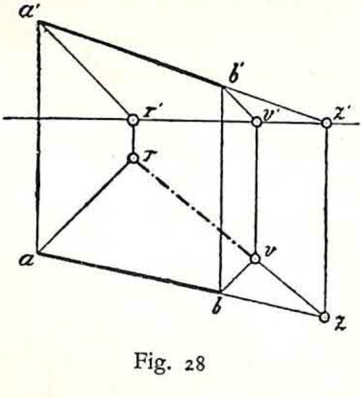


Fig. 28

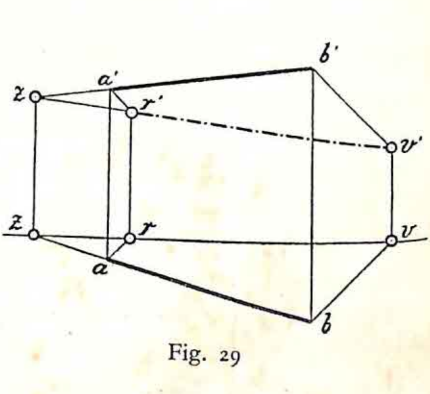


Fig. 29

rät linje, så träffar denna linje horisontalprojektionen *ab* i den sökta punkten *z*.

2:o) *Skuggan faller helt och hållet på vertikalplanet*, fig. 29. Detta inträffar då ändpunkterna *a* och *b* ligga närmare grundlinjen än *a'* och *b'*. Slagskuggans vertikalprojek-

tion $r'v'$ är riktad till den punkt z', där linjen träffar vertikalplanet. Vi finna denna punkt, enligt ovan nämnda regler, genom att förlänga linjens horisontalprojektion ab, tills den skär grundlinjen i z, och från z draga en mot grundlinjen vinkelrät linje, som skär vertikalprojektionen $a'b'$ i z'.

3:o) *Skuggan faller på båda projektionsplanen*, fig. 30. Detta inträffar, då ändpunkten a ligger närmare grundlinjen än a', men ändpunkten b fjärmare än b'. Bestämmes

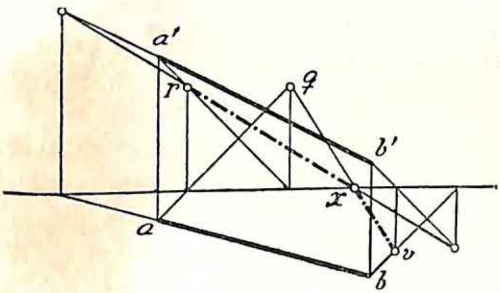


Fig. 30

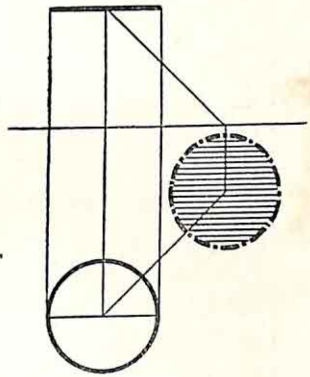


Fig. 31

först hela skuggan på horisontalplanet under antagande att vertikalplanet vore borta, så erhålles skugglinjen qxv. Sökes därefter slagskuggan r av punkten $a.a'$ på vertikalplanet, och sammanbindes r med x, så utgöres linjens hela synliga skugga av den brutna linjen rxv.

Slagskuggan av en krokig linje bestämmes av ljusstrålar genom dess punkter. Alla dessa strålar bilda en *cylindrisk ljusyta*, vadan kroklinjens slagskugga utgör skärningen mellan den cylindriska ytan och projektionsplanet. Är kroklinjen plan och dessutom parallell med det plan, på vilket slagskuggan faller, så bliver denna slagskugga kongruent med kroklinjen. Så är skuggan på horisontalplanet av den vågräta cirkeln, fig. 31, en lika stor cirkel, vilken lätt kan konstrueras, sedan medelpunktens skugga på ovan visat sätt blivit bestämd.

§ 4. En punkts och en linjes slagskugga på polyedrars och runda kroppars ytor

För att finna slagskuggan av en punkt på en plansidig eller rund kropps begränsningsyta, tänka vi oss genom punkten ett ljusplan och bestämma dess skärning med kroppen. Uti denna skärning erhålla vi slagskuggan medelst en ljusstråle från punkten. Oftast användes härvid ett *vertikalt ljusplan.*

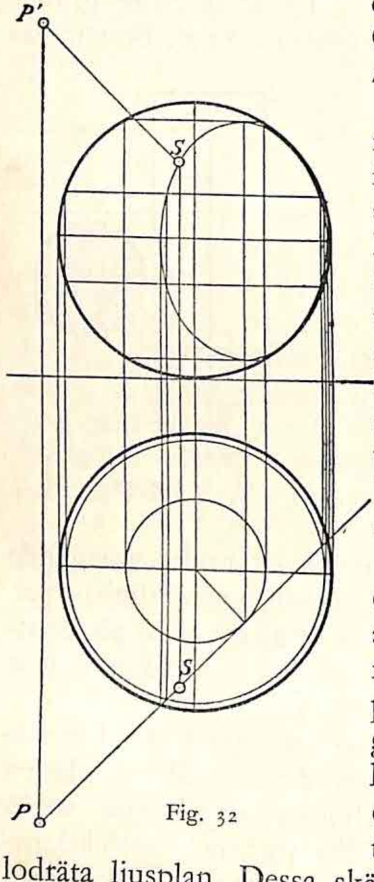


Fig. 32

Om vi sålunda skola bestämma skuggan av punkten *p.p'*, fig. 32, på en sfärs yta, så skära vi sfären med ett vertikalt ljusplan genom punkten. Skärningens horisontalprojektion bliver då en 45° linje och dess vertikalprojektion en ellips. Ljusstrålen från *p'* träffar ellipsen i *s'*, som är slagskuggans vertikalprojektion. Ur *s'* härledes medelst en lodlinje horisontalprojektionen *s*.

Slagskuggan av en linje, rät eller krokig, finna vi genom att på nyss visat sätt bestämma slagskuggorna av åtskilliga punkter på densamma. Skuggan av linjen *ab.a'b'* på den lodräta cylinderns yta, fig. 33, erhålles, om genom linjens punkter *a.a'*, *b.b'*, *m.m'* ... läggas lodräta ljusplan. Dessa skära cylinderytan i generatriser, på vilka de sökta skuggpunkterna *c'* ... ligga.

Skuggan av linjen *ab.a'b'*, på den lodräta konen, fig. 34, bestämmes medelst genom åtskilliga punkter *a.a'*, *b.b'*, *m.m'* ... dragna vertikala ljusplan. Dessa skära konen i hyperblar, vilka konstrueras med ledning av *pl. XV*, och på vilka de sökta skuggpunkterna *c* ... ligga.

Innan vi, på grund av nu inhämtade konstruktionsmetoder, mera fullständigt utföra åtskilliga exempel inom den geometriska skuggläran, vilja vi nu meddela följande allmänt antagna:

§ 5. **Regler för uppritandet av skugglinjer**

1:o) Gränslinjen mellan två *ljusa* ytor drages *fin*, gränslinjen mellan två *mörka grov*.

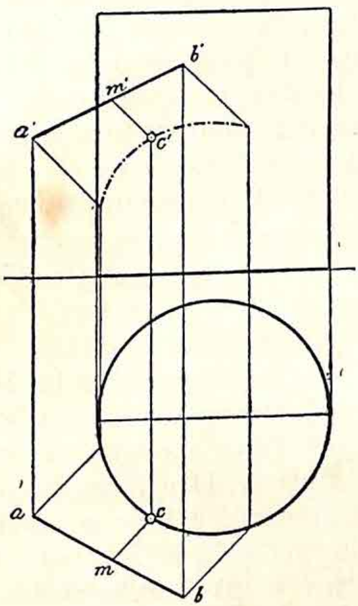


Fig. 33

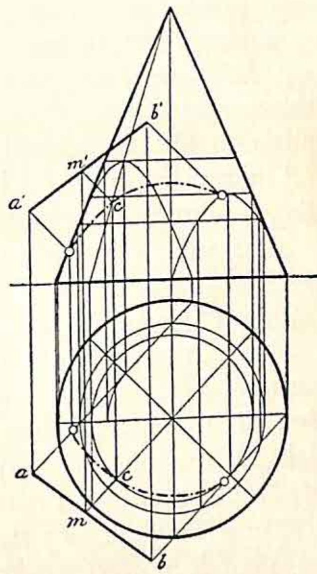


Fig. 34

2:o) Gränslinjen mellan en ljus och en mörk yta drages *grov*. Undantag: kanter i *inåtgående* hörn, ävensom linjer tillhörande ett föremåls bottenplan eller projektionsplanen dragas städse *fina*. *Linjer, tillhörande en buktig ytas kontur, dragas fina, även om de ligga på den mörka delen av ytan.*

3:o) Linjer *i* ett plan eller *i* en yta, vilka således icke äro kantlinjer, dragas *fina* även om ytan är mörk.

4:o) Osynliga linjer dragas alltid fina.

5:o) En linje, som i ena projektionen är grov eller fin, betecknas i allmänhet i den andra på samma sätt.

Slutligen må ihågkommas att:

6:o) Då ritningen innehåller konstruktions- och hjälplinjer, böra dessa dragas ännu finare än föremålets egna fina linjer.

§ 6. **Polyedrars skuggor och slagskuggor. Pl. XX**

Fig. 1. Skuggan av en på horisontalplanet stående kub.

Kuben är så ställd, att hela skuggan faller på horisontalplanet. Slagskuggan av hörnpunkten *d.d'* är *s.s'*, som bestämmes medelst en ljusstråle genom punkten. På samma sätt finnas skuggorna av hörnpunkterna *b.d'* och *c.c'*. Slagskuggorna av de lodräta kanterna äro 45° linjer, slagskugggorna av de vågräta kanterna äro parallella och lika stora med kantlinjerna själva.

Linjerna *cb* och *bd* i horisontalprojektionen samt linjen $d'd'_1$ i vertikalprojektionen dragas grova (enligt regel 2). Skuggans begränsning markeras medelst en streckprickad linje.

Fig. 2. Skuggan av en lodrät 6-kantig prisma.

Skuggorna av punkterna *a* och *b* falla i *p* och *s* på horisontalplanet, och skuggan av hela linjen *ab* är därför den därmed parallella *ps*. Däremot faller skuggan av *bc* dels på horisontal- dels på vertikalplanet. Den förra delen utgör en genom *s* dragen, med *bc* parallell linje *sx*, den senare delen är sammanbindningen mellan punkten *x* på grundlinjen och skuggpunkten *y'* på vertikalplanet. Skuggan av hela linjen *cd.a'd'* bliver en vågrät linje på vertikalplanet.

Linjerna *ab*, *bc* och *cd* uti horisontalprojektionen samt $a'a'_1$, $b'b'_1$ och *a'b'* i vertikalprojektionen dragas *grova*.

Fig. 3. Skuggan av en lodrät 5-kantig pyramid.

Spetsens slagskugga på horisontalplanet är *s.s'*, och enär pyramiden här antages stående på horisontalplanet, sammanbindes denna punkt med de yttersta punkterna *a* och *b*. Pyramidens slagskugga på detta plan bliver då begränsad av linjerna *ad* och *bf*. Det övriga av skuggan faller på vertikalplanet och finnes genom att sammanbinda punkterna *f* och *d* med spetsens skuggpunkt *q'* på vertikalplanet.

De tre kantlinjerna *oa*, *ob* och *oc* dragas grova, däremot de två bottenlinjerna *ac* och *bc* fina, emedan de ligga på horisontalplanet. I vertikalprojektionen äro *o'a'* och *o'c'* grova, däremot bottenlinjen *a'c'* fin.

Fig. 4. Skuggorna av en sexkantig prisma och en därpå vilande fyrkantig platta.

a) *Plattans slagskugga på prisman.* Hörnpunkten *a.a'* kastar en slagskugga *b.b'*, som bestämmes av en ljusstråle genom punkten. 45° linjen *e'b'* är då skuggan av kanten *ak.a'* på prismans sidoplan. För att finna skuggans brytningspunkt på kantlinjen *c.c'c'*$_1$, draga vi i horisontalprojektionen en ljusstråle *tillbaka* från *c*. Därigenom avskäres punkten *d*, vilken uppföres till *d'*[1], som medelst en ljusstråle giver skuggpunkten *q'*. Slagskugglinjen *q'f'* är parallell med *ah.a'h'* och således vågrät.

b) *Plattans och prismans slagskuggor på projektionsplanen* bestämmas på samma sätt som i *fig. 2*.

Vilka linjer, som skola göras grova, torde numera, efter de vid föregående figurer givna anvisningarna, ej behöva särskilt påpekas.

§ 7. Runda kroppars skuggor och slagskuggor. Pl. XX och XXI

En buktig ytas skugglinje är sammanbindningslinjen mellan de punkter, i vilka de yttersta ljusstrålarna beröra ytan. Vid cylindriska och koniska ytor bilda de yttersta ljusstrålarna *plan*, och skugglinjen utgöres av *generatriser*. Vid rotationsytor bilda de yttersta ljusstrålarna en cylindrisk ljusyta, och skugglinjen bliver en kroklinje.

Pl. XX, fig. 5. Skuggan av en på horisontalplanet stående cylinder.

De yttersta ljusstrålarna beröra cylinderns buktiga yta efter två generatriser *a.a'a'*$_1$ och *b.b'b'*$_1$, som bestämmas medelst tangerade 45° linjer i horisontalprojektionen. Slagskuggan av *b.b'b'*$_1$ faller helt och hållet på horisontalplanet uti *bc*, slagskuggan av *a.a'a'*$_1$ är *a.xy'*, som del-

---

[1] På figuren infaller *d'* i prismans kant. Detta är naturligtvis endast en tillfällighet.

vis ligger på vertikalplanet. För att finna slagskuggan av övre basen söka vi först skuggan *s.s'* av medelpunkten *m.m'* och slå med *s.s'* till medelpunkt och *mb* till radie en cirkel, som tangerar linjen *bc* i *c* och skär grundlinjen i *d*. Föres en ljusstråle tillbaka från skärningspunkten *d* till cylinderbasen, så erhålles punkten *e*, och stycket *be* är då den del av omkretsen, som har sin slagskugga på horisontalplanet. Den övriga delen av cirkeln, från *e* till *a*, kastar skugga på vertikalplanet. Slagskuggans begränsningslinje över grundlinjen är en ellipsbåge.

Pl. XX, fig. 6. Skuggan av en på horisontalplanet stående kon.

Vi bestämma här de generatriser, som utgöra skugglinjen, genom att *först* söka slagskuggan. Skuggan av spetsen *o.o'* på horisontalplanet är *s*, och om vi från *s* draga tangenter till bascirkeln, så äro de under grundlinjen befintliga styckena *cy* och *bx* slagskuggans begränsningslinjer på horisontalplanet. Sammanbindas nu tangeringspunkterna *b* och *c* med spetsen *o*, så erhållas skugglinjerna *ob* och *oc* med vertikalprojektionerna *o'b'* och *o'c'*. Spetsens skugga på vertikalplanet är *q.q'*, och sammanbindningslinjerna *q'x* och *q'y* bilda slagskuggans begränsning på detta plan.

Pl. XXI, fig. 1. Skuggan av en lodrät ihålig cylinder.

Konstruktionen är här i huvudsak densamma som i *fig. 5, pl. XX*, endast iakttages att, på grund av hålformen, en del av den inre begränsningsytan kastar slagskugga på den andra delen av ytan.

Drages i horisontalprojektionen en 45° tangent, som berör halvcirkeln i *c*, så är bågen *ac.a'c'* den mörka delen av halvcirkeln. Slagskuggan på den inre cylinderytan alstras av denna båge och av den mörka kantlinjen $a.a'a'_1$. Den senares skugga är en lodrät linje $b.b'b'_1$, vars ändpunkt *b'* avskäres av en ljusstråle från *a.a'*. Den övriga delen av slagskuggan är en ellipsbåge, som konstrueras genom att från punkter *d.d'* . . . på cirkelbågen *ac.a'c'* draga ljusstrålar och bestämma deras skärningar på cylinderytan.

Skuggor av runda kroppar, begränsade av rotationsytor. Dessa skuggor kunna bestämmas på flera sätt. Det allmännaste är: *användandet av skärande vertikala ljusplan.* Sådana plan skära kroppens begränsningsyta efter kroklinjer I, II, III... fig. 35, vilkas tangeringspunkter med de yttersta ljusstrålarna tillhöra skugglinjen. Såsom exempel hava vi tagit:

Pl. XXI, fig. 2. Skuggan av en sfär.

Skära vi sfären med åtskilliga vertikala ljusplan, *I, II*... så bliva skärningarnas vertikalprojektioner ellipser, som kunna bestämmas medelst vågräta hjälpplan, på sätt vi förut visat i *fig. 1, pl. XVII.* Till ellipsens vertikalprojektion dragas 45° tangenter, vilkas tangeringspunkter ligga på den sökta skugglinjen.

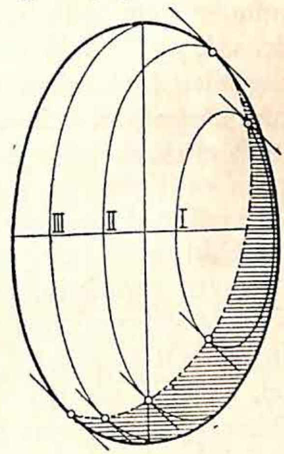


Fig. 35

De yttersta ljusplanen bestämma skugglinjens konturpunkter *a* och *b*, vilkas vertikalprojektioner äro *a'* och *b'*. Tänka vi oss sfärens vertikalprojektion behandlad på liknande sätt, i det vi föreställa oss skärande ljusplan, som äro *vinkelräta mot vertikalplanet*, så inses att även skugglinjens konturpunkter i vertikalprojektionen bestämmas av 45° tangenter. Dessa konturpunkter *c'* och *d'* motsvaras i horisontalprojektionen av *c* och *d*.

Skugglinjens högsta och lägsta punkter *h.h'* och *g.g'* måste ligga i det vertikala ljusplan I—I, som går genom axeln och sålunda delar sfären i två symmetriska hälfter.

Slagskuggan på horisontal- och vertikalplanet finnes genom att från åtskilliga punkter *a.a'*, *b.b'* ... på den egna skugglinjen draga ljusstrålar och på vanligt sätt bestämma dessas skärning med projektionsplanen.

I föreliggande fall, då den runda kroppen är en sfär, bliver skugglinjen på den sfäriska ytan en storcirkel, vars projektioner äro ellipser, samt slagskugglinjerna på horisontal- och vertikalplanet likaledes ellipser.

Slagskuggan av en rund kropp på en annan.

Pl. XXI, fig. 3. Kon och cylinder.

Vi bestämma på vanligt sätt konens skugga och slagskugga på horisontalplanet. För att sedan finna cylinderns skuggor samt konens slagskugga på cylindern, kunna vi använda lodräta ljusplan, dragna genom punkter *o.o'*, *f.f'* ... på konens skugg-generatriser. Dessa ljusplan skära cylindern i ellipser, vilka enligt kända regler kunna uppritas, och vars 45° tangenter bestämma cylinderytans egen skugglinje, under det att ljusstrålar från punkterna *o.o'*, *f.f'* ... avskära slagskuggpunkterna på ellipserna. Emellertid löses detta och liknande skuggproblem mycket enklare *med tillhjälp av en sidoprojektion*, Vi tänka oss ett nytt projektionsplan *vinkelrätt mot cylinderns längdriktning* och projiciera på detta plan konen med dess skugglinjer samt cylindern. Den senare framstår såsom en cirkel, vilande på den nya grundlinjen *ik*, konen såsom en likbent triangel, vars höjd erhålles ur den första vertikalprojektionen.

Ljusstrålarnas projektioner på det nya planet bestämmas på följande sätt. Den från konens spets *o.o'* dragna ljusstrålen träffar horisontalplanet i *s.s'*. Om denna punkt projicieras till *s''* på den nya grundlinjen *ik*, och *s''* sammanbindes med *o''*, så angiver *o''s''* den sökta ljusstråleprojektionen. Alla ljusstrålar i sidoprojektionen bliva därför parallella med *o''s''*. Strålen *o''s''* träffar cylinderytan i *c''*, vilken återföres till *c* i horisontalprojektionen och *c'* i vertikalprojektionen, varmed spetsens slagskugga på cylinderytan är bestämd. Skuggpunkterna på cylinderkonturen *ab* finnas genom att i sidoprojektionen från *a''* draga en ljusstråle tillbaka till punkterna *e''* och *f''* på konens skugglinjer. Dessa punkter motsvaras av *e* och *f* i horisontalprojektionen samt *e'* och *f'* i vertikalprojektionen. De från *e.e'* och *f.f'* dragna ljusstrålarna giva nu de sökta konturpunkterna. Cylinderns egen skugga erhålles medelst ljusstråletangenterna i *n''* och *m''*. Dess slagskugga på horisontalplanet kan konstrueras, antingen såsom vanligt eller, enklare och noggrannare, med tillhjälp av den tredje projektionen på sätt figuren visar.

Pl. XXI, fig. 4. Skuggor på ett s. k. »tvärhuvud».

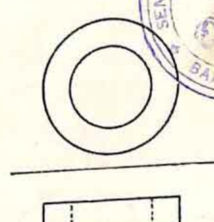
Tvärhuvudet är en ångmaskindel, som förenar kolvstången med vevstaken. Det består av ett parallellepipediskt mittstycke med två runda sidotappar. Figuren visar dess vertikalprojektion, på vilken vi skola bestämma skuggorna, utan användning av horisontalprojektionen. Detta sker med tillhjälp av en sidoritning, i vilken ljusstrålarna projiciera sig såsom från vänster till höger dragna 45° linjer. Skuggan av punkten a' i vertikalprojektionen erhålles, om i sidoprojektionen en ljusstråle drages från a''. Denna träffar cirkeln i b'', vilken punkt överföres till b'. På samma sätt bestämmas alla slagskuggor. Cylindertapparnas egna skuggor finnas medelst 45° tangenter i sidoprojektionen.

Anm. Vid utförandet av ovanstående skuggningsexempel må lärjungen antingen, liksom på planscherna, använda *streckning* eller också *lavering*. I senare fallet begagnas bäst till skuggorna *tusch* eller den färg, som går i handeln under namnet »*Payne's Gray*», till själva figurerna en ljus ton »*Bränd Siena*». Tvärstycket *fig. 4 pl. XX*, kan också anläggas med en tunn ton av »*Preussiskt blått*», vilken är den vid tekniska ritningar antagna färgen för smidesjärn.

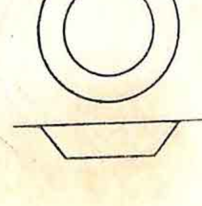
Lämpligast torde vara att utföra *pl. XX* streckad, *pl. XXI* däremot laverad. Papperet, på vilket laveringen skall utföras, bör ej fästas vid ritbrädet endast med häftstift, utan måste i fuktat tillstånd spännas upp på detsamma medelst gummi. Efter torkningen bildar papperet då en fullkomligt slät yta, på vilken färgen jämnt kan utbredas.

§ 8. Övningsuppgifter

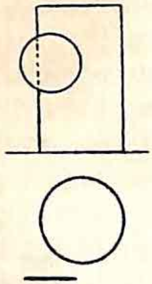
1) På en lodrät cylinder står en kon med samma bas som cylindern: bestäm alla skuggor.



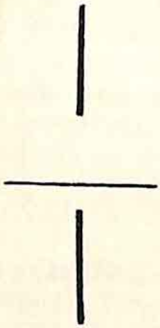
2) En cylindrisk ring, vars axel är vinkelrät mot vertikalplanet, är given; bestäm alla skuggor



3) En vid vertikalplanet fästad konisk platta är given; bestäm alla skuggor.

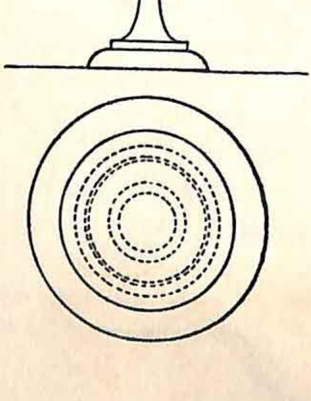


4) En lodrät cylinder och en tunn cirkulär platta äro givna enligt skissen; bestäm alla skuggor.



5) Givet: en cirkel, vars plan är vinkelrätt mot båda projektionsplanen, och vars projektioner således äro räta linjer. Bestäm cirkelns slagskuggor på projektionsplanen.

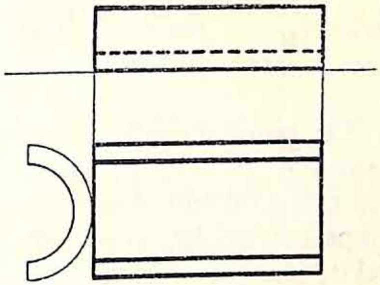
6) Slagskuggan av en sfär på en annan sfär.



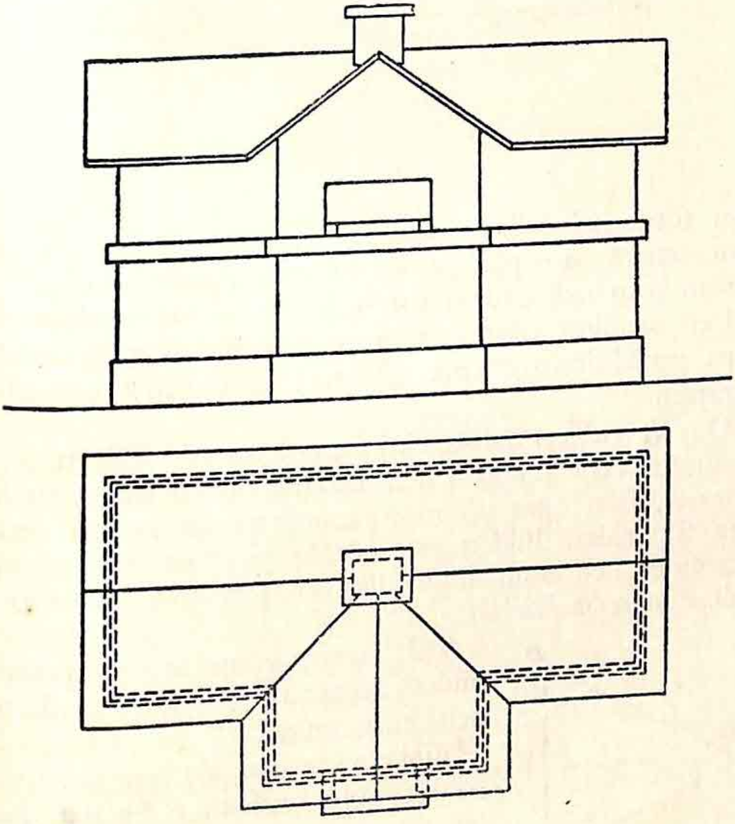
7) Upprita en på horisontalplanet stående vas och bestäm skuggorna på densamma.

8) Bestäm alla skuggorna av de båda parallellepipederna uti *fig. 3*, *pl. VII*.

9) En med den buktiga ytan på horisontalplanet liggande ihålig halvcylinder är given. Bestäm alla skuggor.



9) Bestäm alla skuggor på en mindre byggnad enligt skissen.



Kap. VII. Perspektivlära

§ 1. Inledning

En punkt *Ö* och ett föremål *P* antagas vara givna, text fig. 36. Dragas strålar från föremålets punkter till *Ö*, och avskäres denna »strålpyramid» med ett plan, så uppstår en *bild*, som kallas *centralprojektion*. *Ö* är projektionens *centrum*. Centralprojektionen skiljer sig från

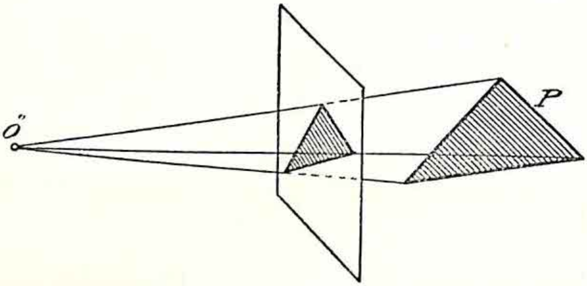


Fig. 36

den förut behandlade *parallellprojektionen* däruti, att vid den senare äro projektionsstrålarna parallella eller — såsom man ock brukar uttrycka det — sammanlöpande till ett oändligt avlägset centrum, vid den förra sammanlöpa projektionsstrålarna till ett i ändligheten befintligt centrum.

Om vi vid centralprojektionen tänka oss i *Ö* ett öga, så ligger varje punkt i den alstrade bilden på en stråle, *synstråle*, från ögat till motsvarande punkt av det verkliga föremålet. Bilden gör därför på ögat ett intryck, liknandet det, som framkallas av föremålet självt och kallas en *perspektivbild*.

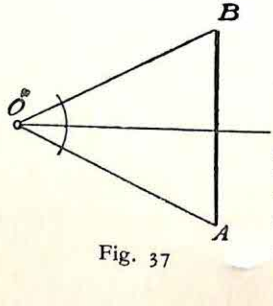


Fig. 37

Vid konstruktion av perspektivbilder begagnas följande anordning och benämningar.

Vinkeln mellan de yttersta synstrålar, som omfatta föremålet, kallas *synvinkeln*. I fig. 37, där *Ö* föreställer ögat och *AB* en sedd sträcka, utgör *AÖB* synvinkeln. Vid perspek-

tivisk avbildning får denna vinkel ej tagas för stor, emedan bilden i sådant fall verkar otillfredsställande. Såsom en erfarenhetsregel kan antagas, att synvinkeln ej bör nämnvärt överstiga 50°. Bättre är att taga den mindre, såsom 36° till 45°.

Det plan, fig. 38, på vilket bilden framställes, kallas *bildplanet* eller *tavlan*, samt tänkes stående *vertikalt* mellan *ögon-* eller *synpunkten* Ö och de föremål, som skola av-

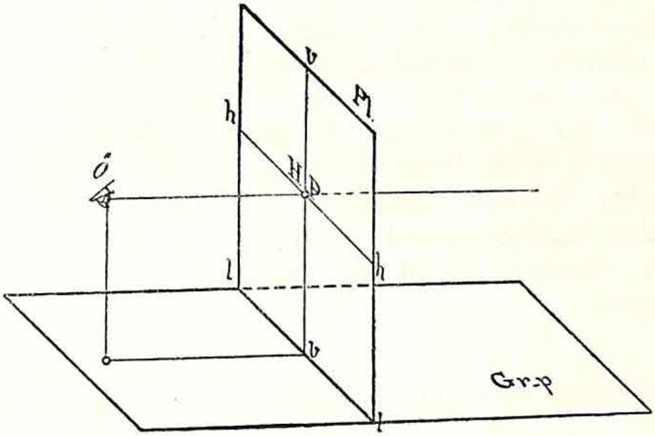


Fig. 38

bildas. Man kan föreställa sig detsamma såsom en genomskinlig glastavla, genom vilken föremålen synas, och på vilken bilden tecknas, så att den täcker de verkliga linjerna. Det vågräta plan, på vilket föremålen befinna sig, kallas *grundplanet* och avskär bildplanet i en vågrät linje *l—l*, *grundlinjen*. Den synstråle, som från ögonpunkten *Ö* drages vinkelrät mot tavlan, kallas *huvudstrålen* och dess avskärningspunkt med tavlan *huvudpunkten*. Denna punkt betecknas i det följande städse med *H.P.* och ligger mitt för ögonpunkten. Den genom *H.P.* dragna vågräta linjen, vilken angiver ögats höjd över grundplanet, kallas *horisont;* den genom *H.P.* gående mot horisonten vinkelräta linjen är tavlans *huvudvertikal.* Horisonten betecknas i följande figurer alltid med *h—h*, huvudvertikalen med *v—v*. Slutligen kallas

avståndet mellan Ö och *H.P.*, alltså avståndet mellan ögat och tavlan, *distans*.

Distansens storlek sammanhänger med den för tavlan gällande synvinkeln. Ju större distans, desto mindre synvinkel.

Oavsett synvinkeln får distansen ej tagas mindre, än att bilden kan tydligt uppfattas av ett verkligt i Ö befintligt öga. 15 cm torde härvid vara en gräns, som ej får nämnvärt understigas.

Perspektivbilden kan konstrueras på tavlan antingen med tillhjälp av föremålets projektioner eller ock omedelbart utan användning av projektionerna. Den förstnämnda konstruktionsmetoden kallas *indirekt perspektiv*, den senare *direkt perspektiv*. Först skola vi använda den indirekta metoden, såsom varande enklare och byggd på den vanliga projektionsläran. Dessförinnan måste några allmänna, för all perspektivritning gällande regler inhämtas.

§ 2. Allmänna regler rörande punkters och räta linjers perspektivbilder

Perspektivbilden av en punkt *A* är, enligt det föregående, skärningspunkten *a* mellan tavlan och en synstråle till punkten. Ligger den verkliga punkten invid tavlan, såsom *s* uti fig. 39, så sammanfaller den med sin perspektivbild.

Perspektivbilden av en rät linje *L* är sammanfattningen av alla dess punkters perspektivbilder. Om således i fig. 39 perspektivbilden av punkten *A* är *a*, av *B*:*b*, av *C*:*c*. . ., så är sammanbindningslinjen mellan alla dessa punkter *a*, *b*, *c* . . . den sökta bilden. Denna bild kan också uppfattas såsom skärningslinjen mellan bildplanet och det genom originallinjen och ögat lagda strålplanet. På bildlinjen äro särskilt två punkter viktiga, nämligen punkten *s*, varest linjen skär tavlan, och punkten *g*, varest den med originallinjen *L* parallella synstrålen träffar tavlan.

Punkten *s* kallas originallinjens *spårpunkt; g* kallas bildens *gränspunkt*, *vilken således bestämmes av en från ögon-*

punkten dragen, med originallinjen parallell linje. Gränspunkten kan uppfattas såsom bilden av den oändligt avlägsna punkten på originallinjen. Av det sagda följer nu perspektivlärans huvudregel:

I) En obegränsad rät linjes bild är sammanbindningslinjen mellan spårpunkten och gränspunkten.

Tänka vi oss flera parallella linjer L_1, L_2 och L_3 . . . fig. 40, så finna vi deras perspektivbilder enligt regel I genom att sammanbinda deras spårpunkter S_1, S_2 och S_3 . . .

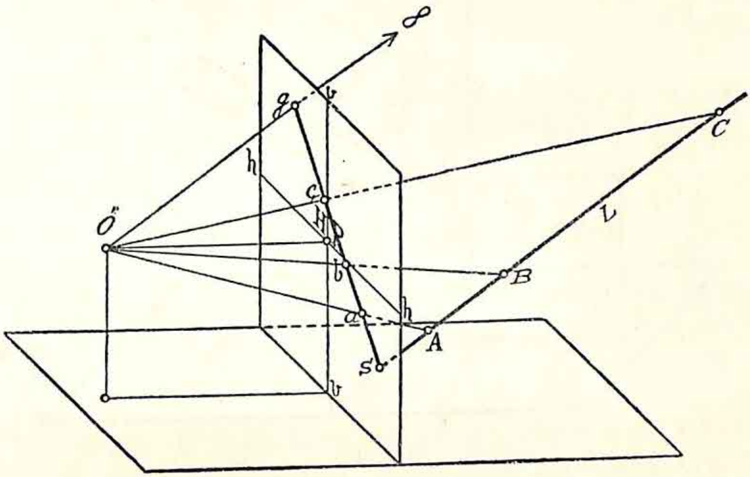


Fig. 39

med deras gränspunkter. Men eftersom linjerna äro parallella, så hava de *samma gränspunkt*, och deras bilder bliva alltså de till gränspunkten g sammanlöpande linjerna S_1g S_2g S_3g . . .

Härav en annan huvudregel:

II) Perspektivbilderna av parallella linjer sammanlöpa till en och samma punkt, nämligen till den gemensamma gränspunkten.

Vi skola använda dessa regler för några vanligen förekommande fall på *pl. XXII*, vars figurer samtliga utföras i sned projektion.

Fig. 1. Perspektivbilder av linjer, vinkelräta mot tavlan.

Sådana linjers gränspunkt finna vi genom att från ögonpunkten Ö draga en med dem parallell linje. Denna linje träffar tavlan i *H.P.* och man finner således:

Huvudpunkten är gränspunkt för alla mot tavlan vinkelräta linjer.

Sammanbindas linjernas spårpunkter S_1, S_2 och S_3 med *H.P.* så hava vi perspektivbildernas riktning. Bildernas ändpunkter *a*, *b*, *c* avskäras av de yttersta strålarna till *A*, *B* och *C*.

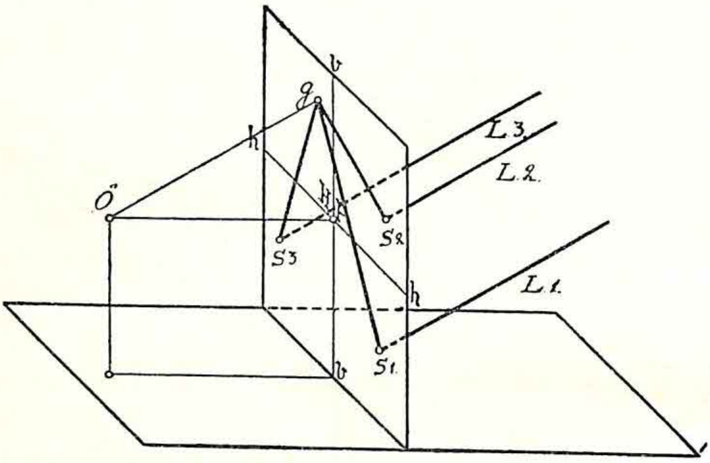


Fig. 40

Fig. 2. Perspektivbilder av vågräta linjer, som bilda sneda vinklar mot tavlan.

Sådana linjers gränspunkt finna vi som ovan genom en parallell linje från ögat. Denna gränspunkt ligger icke i huvudpunkten, men eftersom originallinjerna äro vågräta, måste den ligga på horisonten. Således:

Vågräta linjers gränspunkter ligga på horisonten.

Hava vi tre parallella linjer L_1, L_2, L_3, så är perspektivbildernas riktning bestämd av den gemensamma gränspunkten *g* på horisonten. Bildernas ändpunkter avskäras av de yttersta synstrålarna.

Fig. 3. Perspektivbilder av vågräta linjer, som äro parallella med tavlan.

Sådana linjer hava *ingen spårpunkt*, ty de träffa ej tav-

lan, och *ej heller hava bilderna någon gränspunkt*, ty en från ögat dragen, med originallinjerna parallell linje skär icke tavlan. Bilderna kunna därför ej omedelbart bestämmas, utan erhållas med tillhjälp av andra linjer. Vi draga från ändpunkterna av de tre givna linjerna L_1, L_2, L_3, mot tavlan *vinkelräta* linjer, bestämma dessas bilder enligt *fig. 1* och finna därav de vågräta linjernas bilder, som tydligen även bliva vågräta och parallella med originallinjerna.

Fig. 4. Perspektivbilder av lodräta linjer.

Även här saknas spår- och gränspunkt, varför vi med tillhjälp av mot tavlan vinkelräta linjer bestämma bilderna. Dessa bliva tydligen även lodräta.

Överhuvud framgår helt allmänt av ovanstående, att: *Parallella linjer, som dessutom äro parallella med tavlan, hava parallella bilder.*

§ 3. Indirekt perspektivmetod. Pl. XXIII

Till förklarande av den metod[1], vi nu gå att framställa, antaga vi, att en på grundplanet stående kub skall avbildas.

Fig. 1.

Vi upprita då först horisontalprojektionerna av kuben $ABCD$, av ögonpunkten $Ö$ och tavlan $t—t$, som vi exempelvis antaga ställd invid kubens ena vertikala kant A. Vi draga huvudstrålen $ÖZ$ samt från hörnpunkterna B, C, D, synstrålar till ögonpunkten, vilka strålar träffa tavlan uti punkterna *3*, *2* och *1*. Vidare förlänga vi kantlinjen BC, tills den skär tavlan i S, och draga från $Ö$ en med BC och AD parallell linje, som träffar tavlan i O. Då är O horisontalprojektionen av gränspunkten för linjerna BC, AD och alla med dem parallella linjer.

Sedan härmed horisontalprojektionen är färdig, uppritas vertikalprojektionen av föremålet, tavlan och den därpå alstrade perspektivbilden. Tvärtemot vad vi förut brukat göra, anbringa vi, för utrymmets skull, dessa vertikalprojektioner *under* horisontalprojektionen. Vi draga alltså

[1] Till sina huvuddrag först angiven av G. Berger.

på godtyckligt ställe under *t—t* en vågrät linje *l—l*, föreställande grundlinjen, upprita på denna en kvadrat *K*, som är kubens vertikalprojektion samt däröver en vågrät linje *h—h*, vertikalprojektionen av horisonten. En från *O* till horisonten nedfälld linje giver gränspunkten *g*.

För att nu finna perspektivbilden av den undre baskanten *BC*, behöva vi endast nedfälla *S* till *s* samt sammanbinda *s* med *g*, då är denna sammanbindningslinje bilden av linjen *SBC*... Bilderna av punkterna *B* och *C* finnas uti *b* och *c* medelst lodlinjer från punkterna *3* och *2*. Bilden av linjen *AD*... är *ag*, och bilderna av punkterna *A* och *D* äro *a* och *d*.

Därmed är den undre basens perspektivbild *abcd* konstruerad. Den övre basens bild finna vi på samma sätt, endast med iakttagande av att spårpunkterna av de övre kantlinjerna *AD* och *BC* ligga på en vågrät linje *n—n*, som angives av kubens vertikalprojektion. Sammanbindas slutligen de båda basernas hörnpunkter medelst lodräta linjer, så är kubens hela perspektivbild färdig. De linjer på densamma, som äro osynliga för ett i *Ö* anbragt öga, utmärkas såsom vanligt genom prickning.

Den metod, som här visats för kuben, kan utan svårighet användas för vilket föremål som helst. Vi välja såsom ett andra exempel:

Fig. 2. Perspektivbilden av en lodrät åttkantig prisma.

Prismans horisontalprojektion är åttkanten *ABCDEFIKA*, horisontalprojektionen av tavlan är *t—t*, av ögonpunkten *Ö* och av huvudstrålen *ÖZ*. Vi draga nu, liksom i föregående exempel, synstrålar från alla hörnpunkter till *Ö* och erhålla därigenom punkterna *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*. Om vi vidare sammanbinda hörnpunkterna *A* och *D* samt *E* och *K*, så erhålles en samling parallella linjer, vilka vi förlänga, tills de råka tavlan i spårpunkterna *M*, *N*, *O* och *P*. En från *Ö* dragen, med *AD*... parallell linje, giver horisontalprojektionen *O* av gränspunkten till dessa linjers bilder. Nu uppritas på samma sätt, som i förra exemplet, perspektivbildens vertikalprojektion. Vi draga grundlinjen *l—l* och horisonten *h—h*. Av prismans vertikalprojektion behöva vi endast upprita en höjd-

linje, emedan alla den övre basens punkter ligga på samma höjd över grundplanet. Nedfälles N till n på grundlinjen, sammanbindes n med gränspunkten g, och dragas lodlinjer från punkterna *6* och *8*, så erhålles perspektivbilden if av kanten IF. På samma sätt konstruera vi samtliga begränsningslinjer till prismans undre och övre bas, varefter med de lodräta kantlinjernas insättande perspektivbilden fullbordas.

Fig. 3. Perspektivbilden av en lodrät cylinder. Vi indela basen i ett antal lika delar, t. ex. 12, och sammanbinda, på sätt figuren visar, delpunkterna *0* och *4*, *1* och *3*, *5* och *11* o. s. v., samt draga i punkterna *2* och *8* tangenter, som bliva parallella med sammanbindningslinjerna. Därefter konstrueras övre och undre cylinderbasens perspektivbilder på liknande sätt som i exempel 2. Vi hava här antagit horisonten *under* övre basen, vadan dennas begränsningslinje delvis bliver osynlig. Perspektivbildens konturlinjer finna vi noggrannast genom att från $Ö$ draga tangerande synstrålar till bascirkeln. Dessa tangenter skära tavlans horisontalprojektion i punkterna R och U, och lodlinjerna från nämnda punkter angiva cylinderytans perspektiviska kontur.

§ 4. Direkt perspektivmetod

Vid användning av direkt perspektivmetod behöves ej den utrymmesödande plan- och höjdritningen av det föremål, som skall avbildas, utan konstruktionen kan ske direkt på ritpapperet. Alla konstruktionslinjer och punkter kunna hållas inom ritningens ram.

Fig. 41. En linje AB, liggande på grundplanet, skall avbildas. Linjens spår infaller i s och linjens gränspunkt i H. Dragas synstrålar från ögat $Ö$ till A och B avskäras två punkter på linjen sH, som tydligen äro bildens ändpunkter. Vrides triangeln $AÖB$ ett kvarts varv omkring sH, så att linjen AB sammanfaller med förgrundslinjen och $Ö$ infaller i D, erhålles en åskådlig bild av tillvägagångssättet vid direkt perspektivframställning.

Ögats avstånd från bildplanet, distansen, avsättes för bekvämligthets skull åt sidan på horisonten eller, vid sneddperspektiv, uppåt på huvudvertikalen. Under horisonten på ögonhöjds avstånd drages förgrundslinjen. Distans, horisont, huvudpunkt och förgrundslinje äro oföränderliga vid alla konstruktioner på samma bild eller tavla och kallas den perspektiviska enheten. *Fig. 42.*

Fig. 41

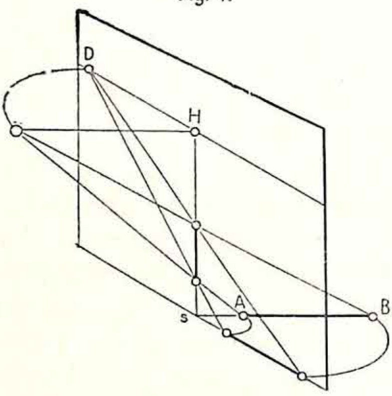
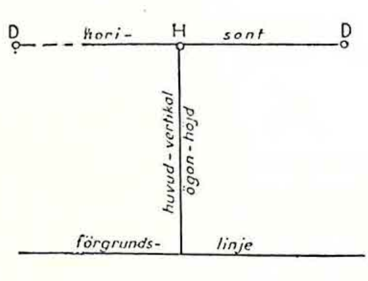


Fig. 42



Perspektivisk enhet

Direkt perspektiv uppdelas i två avdelningar: frontperspektiv och sneddperspektiv, beroende på de avbildade föremålens inställning till bildplanet. Om ett föremål har sidor parallella med eller vinkelräta mot bildplanet säges det intaga en frontal ställning, i annat fall sneddställning.

Fig. 43 visar en kvadrat liggande på grundplanet bakom det lodrätt stående bildplanet. Betraktaren, *Ö*, befinner sig på andra sidan. Linjer vinkelräta mot bildplanet ha sina gränspunkter i *H*. Sammanbindas spårpunkterna av de mot bildplanet vinkelräta kvadratsidorna med gränspunkten *H*, erhålles perspektivbilden av dessa kvadratsidor genom synstrålar till kvadratens hörn.

Fig. 44 klargör hur man direkt uppritar en perspektivisk kvadrat utan tillhjälp av horisontalprojektion. Avsätt från *H* distansen *HD'*, bestäm kvadratsidan *AB*, drag från *A* och *B* linjer till *H*. Sammanbindes *D'B* så avskäres stycket *AC* lika med *AB*. Triangeln *BCD*

är likbent och rätvinklig och hypotenusan *BC* diagonal i den perspektiviska kvadraten *ABDC*. Som diagonal i kvadraten är *BC* en 45 graders linje mot bildplanet och distanspunkten *D'* gränspunkt för alla med diagonalen parallella linjer.

Distansen bör ej tagas för kort. Den bör vara så lång att ögat förmår omfatta motivet i en blick. En och en

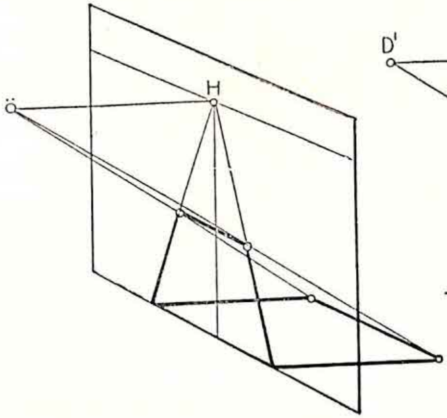


Fig. 43

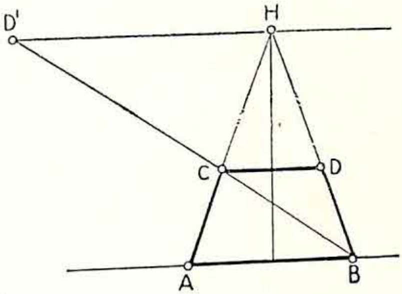


Fig. 44

halv à två gånger motivets utsträckning i höjd eller sidled torde vara minimigräns för distansens storlek. Den bör helst tagas något större.

Perspektivbilden av en linje ligger, enligt huvudregel *1*, någonstans på sammanbindningslinjen mellan spårpunkt och gränspunkt. Spårpunkt är, som vi erinra oss, den punkt där linjen utdragen träffar bildplanet och gränspunkt, där en från ögat gående, med originallinjen parallell linje, träffar bildplanet. Genom att söka en linjes spårpunkt och gränspunkt finna vi linjens riktning och av det följande skola vi lära oss finna en linjes eller en sträckas mått.

Fig. 45. På den mot bildplanet vinkelräta linjen *CH* skall avsättas en sträcka perspektiviskt lika med linjen *AB*. Avsätt måttet *AB* från *C* till *E* på förgrundslinjen. Bestäm distansen *HD*. Drag från *D* till *E* en linje, som avskär punkten *P*. *CP* är den sökta sträckan.

Fig. 46. Från punkten *P* skall avsättas en sträcka perspektiviskt lika med *AB*. Drag från distanspunkten *D* en linje genom *P* till förgrundslinjen. Avsätt från punkten *C* en sträcka *CE* lika med *AB*, sammanbind *E* med *D;* denna linje avskär på linjen *PH* en sträcka *PS* lika med *AB*.

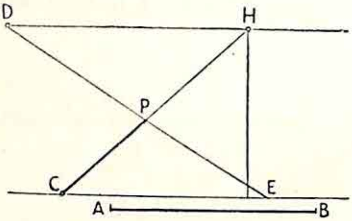


Fig. 45

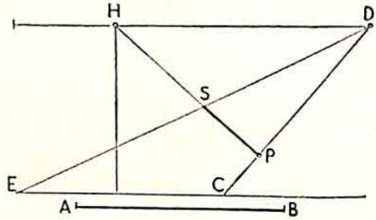


Fig. 46

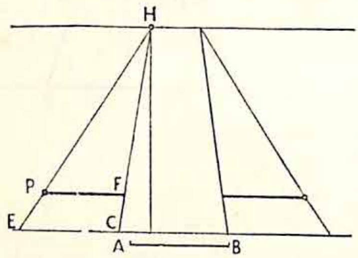


Fig. 47

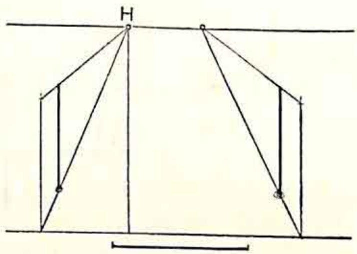


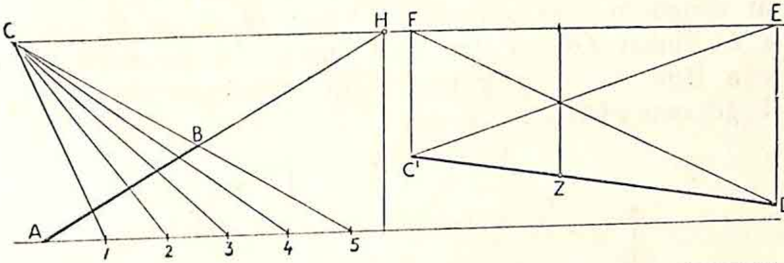
Fig. 48

Fig. 47. En punkt *P* på bildplanet är given. Drag från punkten en vågrät med bildplanet parallell linje, lika stor med givna sträckan *AB*. Sammanbind *H* med punkten och drag ut linjen till förgrundslinjen; från skärningspunkten *E* avsättes linjen *AB* till *C* och linjen *CH* drages. *PF* är den sökta sträckan. Uppgiften löses med vilken punkt som helst på horisonten i stället för *H*, som synes av vidstående figur.

Fig. 48 visar samma uppgift med lodrätt stående sträckor.

Fig. 49. Perspektivisk delning. En given sträcka *AB* skall delas i t. ex. fem lika stora delar: avsätt på förgrundslinjen från *A* fem lika stora delar 1 2 3 4 5. Drag från 5 en linje genom *B* till horisonten *C;* sammanbindas delpunkterna 4 3 2 1 med *C*, så delas den givna linjen *AB* i fem perspektiviskt lika stora delar.

Dela en given sträcka i två perspektiviskt lika stora delar. Drag från ändpunkterna *C'* och *D* linjer vinkelräta mot horisonten och i den sålunda uppkomna figuren *C'DEF* diagonaler; drag vidare genom diagonalernas skärningspunkt en mot horisonten vinkelrät linje, som skär *C'D* i *Z*. *Z* är mittpunkt på *C'D*.



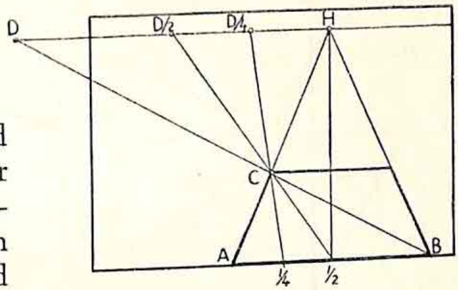


Fig. 50

Fig. 50. Förkortad distans. Om distansen är så stor att *D* faller utanför bildplanet kan en bråkdel av distansen med fördel användas. Fig. 50 visar en på bildplanet uppritad kvadrat. Sidan *AB* ligger i förgrundslinjen och sidan *AC* bestämmes, genom att en linje från *B* till *D* avskär punkten *C* på linjen *AH*. Om distansen *DH* delas mitt itu och kvadratsidan *AB* också delas mitt itu samt punkten ½ sammanbindes med $^{D}/_{2}$ på horisonten, avskäres samma punkt *C* på *AH*. Samma förhållande inträffar om *A* ½ delas i två delar och ¼ sammanbindes med $^{D}/_{4}$ vilken utgöres av halva $^{D}/_{2}$. Vi se sålunda att långa distanser ej vålla mycket besvär, då de kunna ersättas av förkortningar och alla konstruktionspunkter bekvämt kunna hållas inom ritningens ram.

II. Sneddperspektiv

Är ett föremål ställt så att dess kantlinjer eller ytor bilda sneda vinklar mot bildplanet blir avbildningen en s. k. sneddperspektivisk bild. Vid sneddperspektivisk konstruktion är det i allmänhet fördelaktigast avsätta distansen uppåt på den förlängda huvudvertikalen. I fig. 52 är distansen *HÖ* uppsvängd kring *H* så att *Ö* infaller i *D*; linjen *DG* är den med linjen *AB* parallella i sitt nya läge. *G* är gränspunkt för vänstergående linjer i kvadraten *ABCE*.

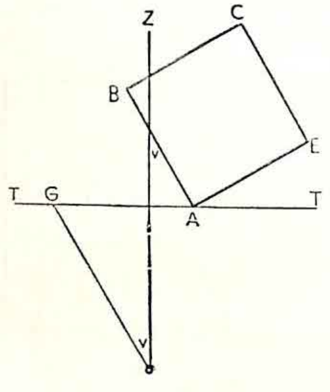


Fig. 51

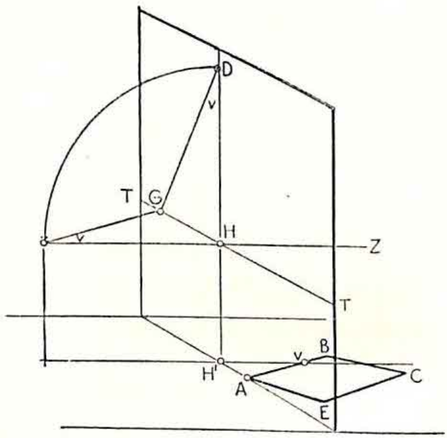


Fig. 52

Fig. 51 visar i horisontalprojektion nämnda kvadrat *ABCE* med huvudstrålen *ÖZ* och bildplanet *TT*. *Fig. 52* framställer kvadraten *ABCE* liggande på grundplanet skuren av huvudstrålens horisontalprojektion på sätt som visas i fig. 51. I sistnämnda fig. är linjen *ÖG* dragen parallell med kvadratsidorna *AB*, *CE* och punkten *G* är följaktligen gränspunkt för dessa sidor. Linjen *ÖG* bildar med huvudstrålen en vinkel *v* som är lika stor som den vinkel huvudstrålen bildar med kvadratsidan *AB*. För att få bevis härför övergå vi till Fig. 52 där vi finna två trianglar, *ÖGH* och *AvH'* som äro likformiga; sidan *Av* är parallell med sidan *ÖG*, sidan *ÖH* parallell med *H'v* och sidan *GH* parallell med sidan *AH'*. Likfor-

miga trianglar ha lika vinklar och således är vinkeln *GÖH* lika med vinkeln *AvH'*. Vid bestämmandet av gränspunkt för en mot bildplanet sned, horisontal linje, har man sålunda att på den sidan åt vilken linjen är bortåtgående avsätta en vinkel, med spets i *D*, lika stor som lutningsvinkeln mellan originallinjen och huvudstrålens horisontalprojektion. Vinkelbenet avskär gränspunkten på horisonten.

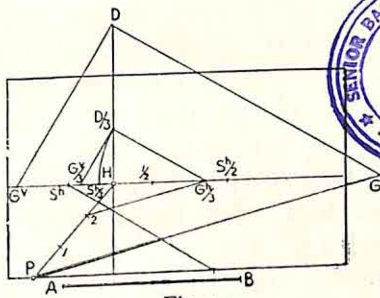


Fig. 54

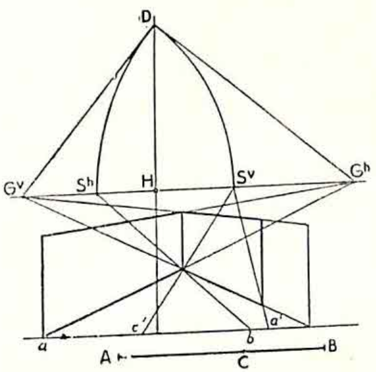


Fig. 53

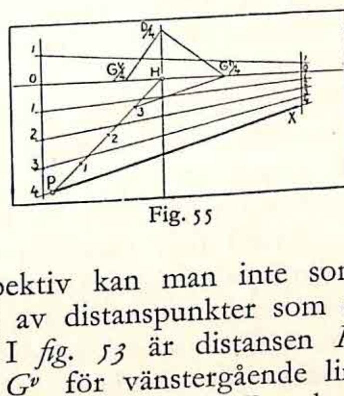


Fig. 55

Vid ritning i sneddperspektiv kan man inte som i frontperspektiv använda sig av distanspunkter som delnings- eller sträckpunkter. I *fig. 53* är distansen *HD* bestämd och gränspunkten G^v för vänstergående linjer avsatt på horisonten; sammanbind G^v med *D* och sätt mot denna linje i *D* en rät vinkel vars andra ben avskär punkten G^h på horisonten, denna punkt är gränspunkt för högergående linjer. Sträckpunkt för vänstergående linjer erhålles om linjen $G^v D$ nedlägges på horisonten, S^v är sträckpunkt för vänstergående och med samma förfarande med linjen $G^h D$, S^h sträckpunkt för högergående linjer.

Med tillhjälp av de sålunda bestämda gräns- och sträckpunkterna skola uppritas tvenne väggar bildande ett

rumshörn. Den längre väggen skall vara lika lång som hela linjen *AB* och den kortare väggen lika med *AC*, sträckorna *ab* och *a'c'* på förgrundslinjen.

Ligger distanspunkt och gränspunkt utanför ritningens ram kan man även i sneddperspektiv arbeta med förkortad distans och gränspunkt.

Fig. 54. Dela distansen *HD* i tre lika delar och avsätt $^{D}/_{3}$ från *H*; bestäm $G^{h}/_{3}$ och $G^{v}/_{3}$ på vanligt sätt. Från punkten *P* skall dragas en linje mot den utanför ramen befintliga gränspunkten: sammanbind *P* med *H* och dela avståndet i tre lika delar; drag från delpunkten närmast *H* en linje till $G^{h}/_{3}$; geometriskt parallellt med denna linje drages från *P* en linje, som är den sökta.

Linjens perspektiviska längd skall avsättas lika med en linje *AB*. Bestäm först punkten $S^{h}/_{3}$ genom en cirkelbåge från $^{D}/_{3}$ till horisonten och avsätt avståndet $HS^{h}/_{3}$ tre gånger åt vänster från *H*, hel sträckpunkt erhålles då. Halv sträckpunkt erhålles om måttet $G^{h}/_{3}$ $S^{h}/_{3}$ halveras och sträckan $H^{1}/_{2}$ avsättes från *H* tre gånger åt höger.

Fig. 55. Skola flera parallella linjer dragas användes bekvämast en s. k. perspektivskala. Från punkten *P* skall dragas en linje riktad mot obefintlig gränspunkt. Konstruktion lika med föregående figur. Drag på lämpligt avstånd från varandra två mot horisonten vinkelräta linjer, som båda skära linjen *Px*; dela de båda avstånden mellan linjen *Px* och horisonten i lika många delar. Linjer dragna genom motsvarande punkter äro perspektiviskt parallella. Självfallet kunna måtten även avsättas över horisonten.

III. Spegelperspektiv

Fig. 56 visar en schematisk bild av spegling. Månskäran speglas i ett stilla vatten och ögat *Ö* uppfångar ljusstrålen, som brytes mot vattenspegeln. Strålen träffar vattenspegeln i *y* och bildar mot denna en vinkel *i*, benämnd infallsvinkel. Ljusstrålen återkastas av vattenytan

och träffar ögat i *Ö*. Vinkeln mellan den återkastade strålen och vattenspegeln kallas utfallsvinkel, *u*. Dessa båda vinklar äro alltid lika stora.

Fig. 57 framställer en parallellepiped stående i ett rumshörn, där såväl fondväggen som sidoväggen äro speglar. Vi se här att spegelbilden återfinnes precis lika långt

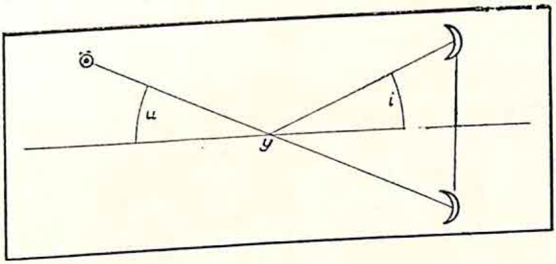


Fig. 56

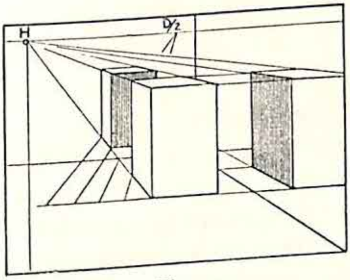


Fig. 57

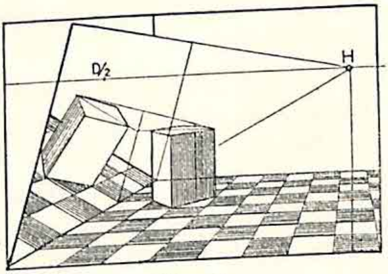


Fig. 58

»bakom» spegeln som föremålet befinner sig framför densamma. Vid återgivande av spegelbilder har man således att uppställa bilden på samma avstånd på båda sidor om den speglande ytan, dock med iakttagande av perspektiviska förkortningar och perspektiviska lagar för övrigt.

Ett liknande föremål, *fig. 58*, är ställt vid sidan om en snett ställd spegelyta. Spegelbilden av golvets bortre kant erhålles genom att avsätta vinkeln mellan golvets och spegelns bortre kantlinje på andra sidan om spegelkanten. Sedan konstrueras bilden i spegeln på samma sätt som i den föregående bilden. Man måste dock använda *en* gränspunkt och *en* distans för båda bilderna.

7—242781

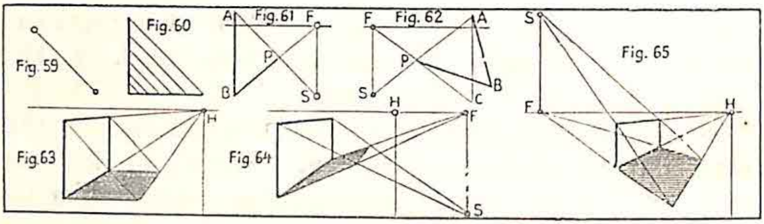


Fig. 66

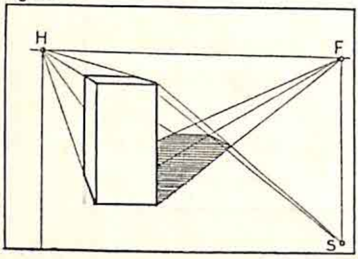
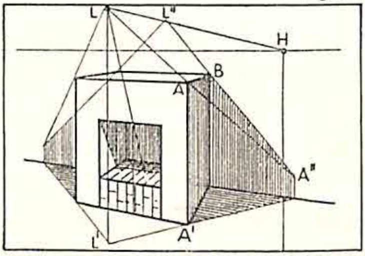


Fig. 67



IV. **Skuggperspektiv**

Vid återgivande av belysning och skuggor i konstruktionsperspektiv användes dels solljuset och dels konstgjord ljuskälla. På grund av solens stora avstånd betraktas denna som en ljuspunkt oändligt avlägsen, och solstrålarna som parallella linjer. Användes konstgjord ljuskälla utgå strålarna från ett centrum, ljuslågan, varvid strålarna bli divergerande.

Fig. 59. Skuggan av en punkt på ett plan är den genom punkten gående ljusstrålens skärning med planet.

Fig. 60. En linjes skugga på ett plan är ett genom linjen gående ljusplans skärning med planet.

Fig. 61. En linje *AB* är given. Linjens skugga på grundplanet skall bestämmas: drag från linjens spår *B* en linje, som skär horisonten i *F* och sedan en lodlinje från *F*, bestäm sedan en punkt *S* på denna linje. Ritar man en ljusstråle från *A* till *S* bestämmes *A:s* skugga, *P* på planet och *BP* är den sökta skuggan. *S* kallas *solpunkt* och är gränspunkt för strålen *AS*. Punkten *F* benämnes *fotpunkt* och är gränspunkt för horisontalprojektionen av strålen *AS*.

Fig. 62. Skuggan av en mot grundplanet lutande linje *AB* skall bestämmas. *A* har sin projektion i *C*, sammanbind *C* med *F* och *A* med *S*. Skärningspunkten *P* är skuggan av *A* och sträckan *BP* skuggan av den lutande linjen *AB*.

Fig. 63. Äro solstrålarna parallella med bildplanet, sakna de gränspunkt och ha således ej heller någon solpunkt.

Fig. 64. Om solen står bakom åskådaren ha strålarna sin gränspunkt i *S* och deras projektioner sin gränspunkt eller fotpunkt i *F*.

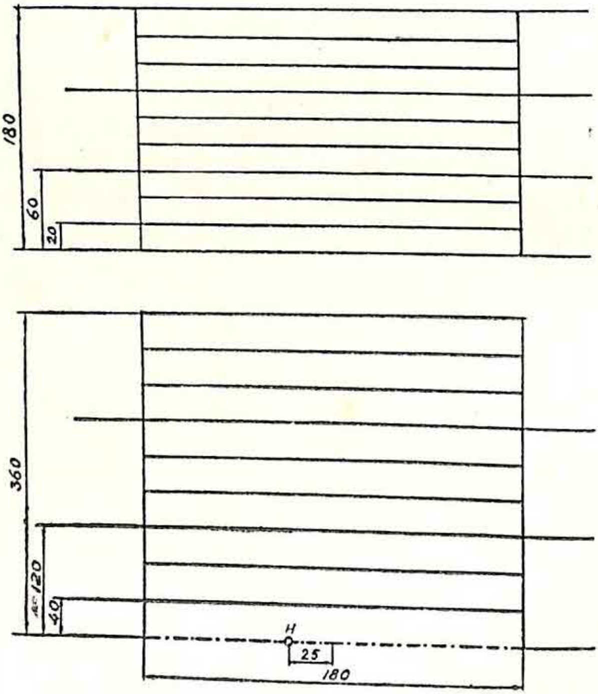
Fig. 65. Står solen framför åskådaren är att märka att *S* ligger över horisonten och betecknar ej solens projektion utan solen själv.

Fig. 66. Skuggan av en parallellepiped stående i frontställning å grundplanet.

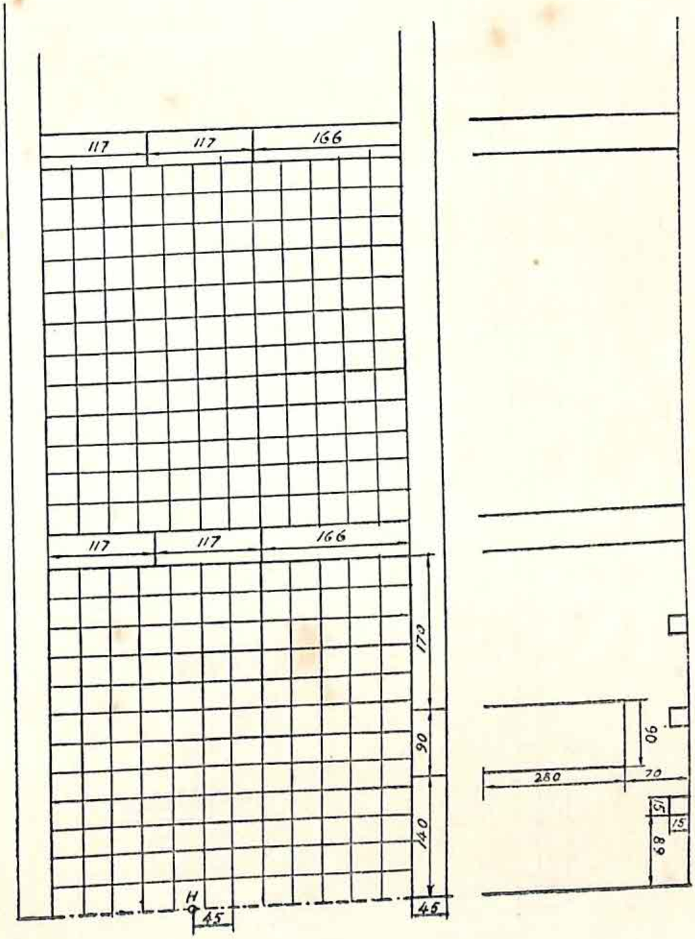
Fig. 67. Öppen spis i sneddperspektiv med själv- och slagskuggor. Konstgjord ljuskälla. Ljusets projektioner på golvet *L'* och på väggen *L''* användas till att bestämma t. ex. skuggan av kantlinjen *AB*. Där ljusstrålen genom *A* skär sin projektion på väggen ligger skuggan i skärningspunkten *A''*.

Pl. XXIV. Fig. 1. Trappa i frontperspektiv. Höjd 180 cm; bredd 180 och djup 360 cm. Huvudpunkten 25 cm till vänster om trappans mittlinje. Ögonhöjd 130 cm. $^{D}/_{3}$ 70 cm. Skala 1:10.

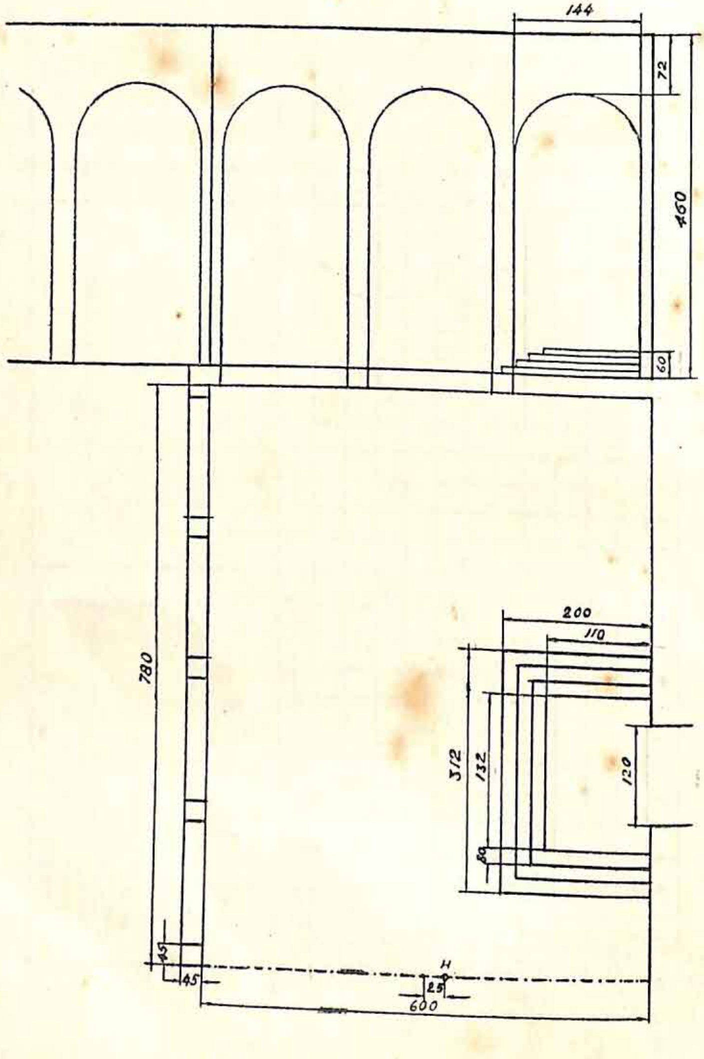
Fig. 2. Cirkelns perspektivbild blir praktiskt taget en ellips. Upprita en cirkel och en densamma omskrivande kvadrat, drag mot kvadratsidorna vinkelräta halveringslinjer samt diagonaler. Det blir sedan lätt att i den i perspektiv satta kvadraten återfinna punkter, gemensamma för den geometriska och den perspektiviska bilden.

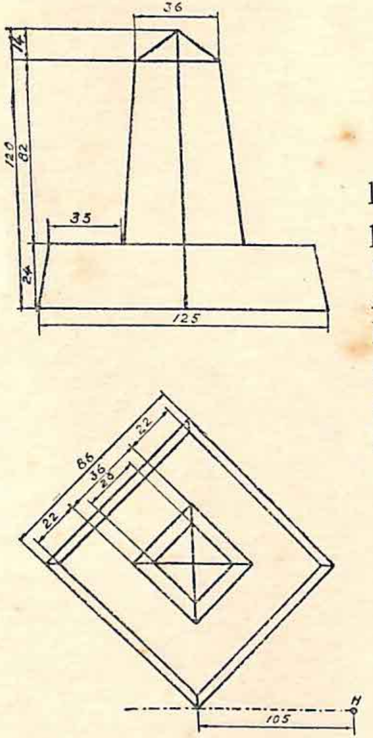


Pl. XXV. Rum med bjälktak, frontperspektiv. I fonden skymtar ett annat lika stort rum. Höjd 350, bredd 400 och djup 400 cm. Huvudpunkten 45 cm till vänster om mitten. Ögonhöjd 170 cm. $^{D}/_{2}$ 240 cm. Skala 3 : 50.



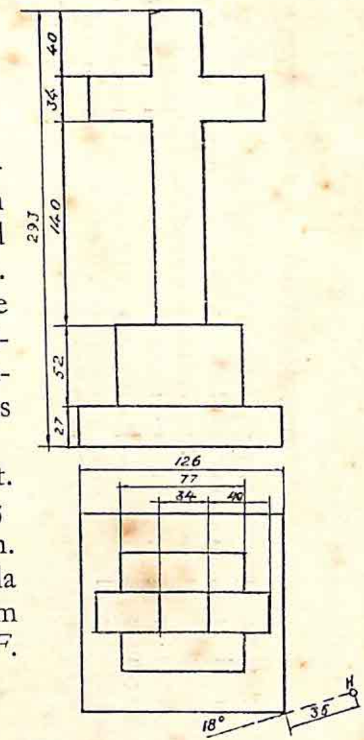
Pl. XXVI. Trapphall med loggia. Höjd 460, bredd 600 och djup 780 cm. Huvudpunkten 25 cm till vänster om mitten. Ögonhöjd 165 cm $^D/_2$ 390 cm. Skala 3 : 50.





Pl. XXVII. Fig. 1. Båk med spegling. Huvudpunkten 105 cm t. h. om postamentets främre hörn. Ögonhöjd 165 cm. $^{D}/_{2}$ 140 cm. Skala 2:25. Avsätt breddmåtten å en genom främre hörnet dragen vågrät linje och höjdmåtten å en genom samma hörn dragen lodlinje. Huvudpunkten användes som diagonalpunkt.

Fig. 2. Kors stående å postament. Sneddperspektiv. Huvudpunkten 35 cm. t. h. om bildens främre hörn. $^{D}/_{4}$ 50 cm. Ögonhöjd 165 cm. Skala 1 m.=7,5 cm. Belysning: *F.* 98 cm t. h. om *H.* och *S.* 135 cm under *F.*



Övningsuppgifter

Lämpliga övningar för perspektivisk ritning erbjuda de vanliga projektionsmodellerna, ävensom modeller av möbler, valv, trappor o. d. Om tiden så medgiver kan ock ett enkelt rum eller en liten byggnad uppmätas och, enligt givna regler, sättas i perspektiv. Såsom en härtill förberedande uppgift må lärjungen taga perspektivbilden av det på sidan 81 i projektioner givna huset. Dess horisontalprojektion ställes därvid lämpligast så att sidorna bilda 60° resp. 30° vinkel med tavlan *t—t*.

Pris Kr. 6:35